Über die Änderung der Klassengruppe eines algebraischen Funktionenkörpers bei Erweiterung des Konstantenkörpers

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Norman Guthschmidt

aus Sofia

Göttingen 1964

Druck:

ERNST-REUTER-GESELLSCHAFT
der Förderer und Freunde der Freien Universität Berlin e.V.

DISSERTATIONS-DRUCKSTELLE

1 Berlin 33, Garystr. 45

Über die Änderung der Klassengruppe eines algebraischen Funktionenkörpers bei Erweiterung des Konstantenkörpers

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Norman Guthschmidt

aus Sofia

Göttingen 1964

D 7

Referent: Prof. Dr. M. Deuring

Korreferent: Prof. Dr. H. Grauert

Tag der mündlichen Prüfung: 26. Juni 1964

Inhaltsverzeichnis

Seite

Einleitung 1

§ 1. G-Moduln.

1.1. Galoisbetrachtungen in G-Moduln 4

1.2. Die Ableitung eines G-Moduls 6

1.3. Ableitungen höherer Ordnung eines G-Moduls 9

1.4. Der Fall einer zyklischen Gruppe 11

§ 2. Allgemeines über die Änderung der Klassengruppe eines algebraischen Funktionenkörpers bei Konstantenerweiterung.

2.1. Kurze Zusammenfassung über wichtige Eigenschaften von Konstantenerweiterungen von algebraischen Funktionenkörpern 16

2.2. Einbettung 17

2.3. Der Fall einer rein-transzendenten Körpererweiterung L von K 18

2.4. Eine Anwendung von Satz 2.3.2 20

§ 3. Änderung der Klassengruppe eines algebraischen Funktionenkörpers bei galoisscher Konstantenerweiterung.

3.1. Konjugierte Divisoren 23

3.2. Galoisbetrachtungen in dem $\Gamma(L, K)$-Modul $\mathfrak{K}_{R_L}$ 28

3.3. Eigenschaften des $\Gamma(L,K)$-Moduls $\mathfrak{K}_{R_L}/\mathfrak{K}_{R}$. . . 44

Literatur 50

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544311_0064

Einleitung

Gegeben sei ein algebraischer Funktionenkörper R mit dem Konstantenkörper K und eine separabel-erzeugbare Körpererweiterung L von K. Mit R_L bezeichne man die Konstantenerweiterung von R bezüglich L (vgl. § 2, Abschnitt 2.1).
Weiter sei $\mathfrak{K}_R$ (bzw. $\mathfrak{K}_{R_L}$) die Klassengruppe von R (bzw. R_L) (vgl. § 2, Abschnitt 2.1).
Nach Satz 2.2.1 kann man $\mathfrak{K}_R$ als Untergruppe von $\mathfrak{K}_{R_L}$ betrachten.
Nun kann man folgende Frage stellen:
Was kann man über die Struktur der Faktorgruppe $\mathfrak{K}_{R_L}/\mathfrak{K}_R$ aussagen?
Nach Satz 2.3.2 genügt es zur Behandlung dieser Frage, dass man sich auf den Fall beschränkt, wo L eine algebraische und separable Körpererweiterung von K ist. Unter gewissen Voraussetzungen für R, K und L existiert zu jedem natürlichen n ein $\alpha_n \in \mathfrak{K}_{R_L}/\mathfrak{K}_R$, welches genau die Ordnung n hat (siehe Satz 2.4.1). Zur Behandlung vieler Fragen dieser Art ist es sinnvoll und keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn man voraussetzt, dass L eine galoissche Körpererweiterung von K ist.

Nun setze man in der ganzen Einleitung voraus, dass L galoissch über K ist.
Sei $\mathfrak{A}$ ein Divisor von R_L. Nach Satz 3.1.2 ist $\mathfrak{A}$ ein Divisor von R dann und nur dann, wenn $\sigma\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ ist für jedes $\sigma \in \Gamma(L,K)$ ($\Gamma(L,K)$ ist die Galoisgruppe von L nach K).

Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit lässt sich in folgenden Punkten erläutern:

1) Ein Analogon von Satz 3.1.2 für die Klassengruppe $\mathfrak{K}_{R_L}$ zu beweisen. Wir fragen nämlich:

(*) Wenn $\alpha \in \mathfrak{K}_{R_L}$ ist, ob $\alpha \in \mathfrak{K}_R$ gleichbedeutend mit $\sigma\alpha = \alpha$ für jedes $\sigma \in \Gamma(L,K)$ ist?

Die Antwort auf diese Frage lautet "nein", wie das Gegenbeispiel in der Bemerkung zu (§ 3, Abschnitt 3.2) zeigt.

Die Aussage in Frage (*) ist richtig, wenn R mindestens einen Primdivisor $\mathfrak{p}$ mit folgenden Eigenschaften besitzt (Satz 3.2.9):

I) Der Restklassenkörper $R(\mathfrak{p}) = \mathfrak{o}_\mathfrak{p}/\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{p}$ ist galoissch über K;

II) Ist $\alpha \in \mathfrak{K}_{R_{R(\mathfrak{p})}}$, so ist $\alpha \in \mathfrak{K}_R$ gleichbedeutend mit $\sigma\alpha = \alpha$ für jedes $\sigma \in \Gamma(R(\mathfrak{p}),K)$.

Weiter geben über diesen Sachverhalt die Sätze 3.2.3, 3.2.4, 3.2.5, 3.2.6, 3.2.7, 3.2.9, 3.2.10, 3.2.11, 3.2.12 und 3.2.13 Auskunft.

2) Daher wird man weiter die folgende Frage stellen:

Wenn R mindestens einen Primdivisor $\mathfrak{p}$ mit den Eigenschaften I), II) besitzt, welche zu den wichtigen Sätzen der klassischen Galoistheorie analogen Aussagen lassen sich hier beweisen, indem man einerseits die Untergruppen der Galoisgruppe $\Gamma(L,K)$ und andererseits die Zwischengruppen $\mathfrak{K}_R \subset \mathcal{A} \subset \mathfrak{K}_{R_L}$ betrachtet?

Als Folgerung von Satz 3.2.12 kann man folgenden Satz beweisen:

Wenn R den Bedingungen I), II) aus Satz 3.2.10 genügt, und L eine endliche Erweiterung von K ist, so sind alle Untergruppen $\mathcal{A}$ von $\mathfrak{K}_{R_L}$ mit $\mathcal{A} = \hat{\mathcal{A}}$ (siehe § 1, Abschnitt 1.1) genau diejenigen, welche sich in der Form $\mathcal{A} = \mathfrak{K}_{R_{L'}}$ für einen passenden Zwischenkörper $K \subset L' \subset L$ darstellen lassen (vgl. Satz 3.2.16).

Ob es ausser diesen noch weitere Untergruppen zwischen $\mathfrak{K}_R$ und $\mathfrak{K}_{R_L}$ geben kann, habe ich nicht entscheiden können.

Weiter sind unter den Voraussetzungen von Satz 3.2.16 folgende

Aussagen äquivalent (vgl. Satz 3.2.17):

1) $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$ und $\Gamma(\mathfrak{K}_{R_L}, \mathcal{A})$ ist ein Normalteiler in $\Gamma(L, K)$;

2) Es existiert ein Zwischenkörper $K \subset L' \subset L$ mit $\mathfrak{K}_{R_{L'}} = \mathcal{A}$, welcher über K normal ist.

3) Man kann folgende Frage stellen:

Gibt es eine galoissche Körpererweiterung L' von K mit folgenden Eigenschaften:

a) $\{1\} = \{\sigma \mid \sigma \in \Gamma(L', K), \sigma\alpha = \alpha \text{ für alle } \alpha \in \mathfrak{K}_{R_L}\}$;

b) $\mathfrak{K}_{R_{L'}} \cong \mathfrak{K}_{R_L}$?

Dieses ist richtig, wenn R den Bedingungen I), II) aus Satz 3.2.10 genügt, und L eine endliche Erweiterung von K ist (Satz 3.2.18).

4) Was kann man über den Untermodul des Faktormoduls $\mathfrak{K}_{R_L} / \mathfrak{K}_R$ aussagen, der genau aus denjenigen $\alpha \in \mathfrak{K}_{R_L} / \mathfrak{K}_R$ besteht, für welche $\sigma\alpha = \alpha$ für jedes $\sigma \in \Gamma(L, K)$ ist?

Eine gewisse Auskunft darüber geben die Sätze 3.3.3, 3.3.4, 3.3.6 und 3.3.7. Z.B. wird in Satz 3.3.7 unter den Voraussetzungen von Satz 3.2.9 behauptet, dass jedes α aus diesem Untermodul von endlicher Ordnung ist.

5) Wenn L eine endliche Erweiterung von K ist, gilt $n^s\alpha = 0$ nur für endlich viele $\alpha \in \mathfrak{K}_{R_L} / \mathfrak{K}_R$ ($n = [L : K]$, s ist eine fest vorgegebene natürliche Zahl)?

Unter den Voraussetzungen von Satz 3.2.9 ist dieses richtig, wenn (vgl. Satz 3.3.8):

a) $n = [L : K]$ eine Primzahlpotenz ist;

b) die Galoisgruppe $\Gamma(L, K)$ zyklisch ist;

c) $\mathfrak{K}_R$ endlich-erzeugbar ist.

Satz 3.3.8 ist eine unmittelbare Folgerung von Satz 3.2.9 und Satz 1.4.6.
Ob die Behauptung von Satz 3.3.8 richtig ist, wenn man die Bedingung a) fallen lässt, habe ich nicht entscheiden können.

Es sei noch folgendes bemerkt: Um zu untersuchen, ob die Faktorgruppe $\bar{R}_{R_L}/\bar{R}_R$ endlich-erzeugbar (bzw. endlich) ist, ist es unter den Voraussetzungen von Satz 3.3.5 keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn man annimmt, dass die Darstellung $\sigma \to \bar{\sigma}$ (siehe § 3, Abschnitt 3.3) treu ist (Folgerung von Satz 3.3.5).
In dem Beweis von allen denjenigen Sätzen aus § 3, welche in den Punkten 1, 2, 3, 4, 5 und in der anschliessenden Bemerkung erwähnt sind, werden die Sätze 3.2.9 oder 3.2.12 wesentlich benutzt.

§ 1. G-Moduln.

In diesem Paragraphen werden gewisse Sätze über G-Moduln (G ist eine Gruppe) bewiesen, welche beim Aufbau von § 3 benutzt werden.
Im Folgenden werden nur G-Linksmoduln betrachtet.

1.1. Galoisbetrachtungen in G-Moduln.

Sei G eine Gruppe und A ein G-Modul.
Für jede Teilmenge $H \subset G$ bilde man

(1) $\quad \mathfrak{F}(A,H) = \{ a \mid a \in A, \sigma a = a \text{ für jedes } \sigma \in H \}$.

Es ist evident, dass $\mathfrak{F}(A,H)$ ein Untermodul des $\mathbb{Z}$-Moduls A ist.
Man nennt $\mathfrak{F}(A,H)$ den Fixmodul von H in dem G-Modul A.

Falls für jedes $\sigma \in G$ $\sigma^{-1} H \sigma = H$ gilt (also insbesondere, wenn H Normalteiler von G ist), so ist $\mathcal{F}(A,H)$ ein Untermodul des G-Moduls A.

Entsprechend definiert man für jede Teilmenge $B \subset A$

(2) $\quad \Gamma(A,B) = \{ \sigma \mid \sigma \in G,\ \sigma b = b \quad \text{für jedes } b \in B \}.$

Man sieht sofort, dass $\Gamma(A,B)$ eine Untergruppe von G ist. $\Gamma(A,B)$ heisse die Galoisgruppe von A nach B.

Weiter setze man für jede Teilmenge $B \subset A$ (bzw. $H \subset G$)

(3) $\quad \hat{B} = \mathcal{F}(A,\Gamma(A,B)) \quad$ bzw. $\quad \hat{H} = \Gamma(A,\mathcal{F}(A,H))$.

Es ist klar, dass für jede Teilmenge $B \subset A$ (bzw. $H \subset G$) die Relationen

(4) $\quad B \subset \hat{B}$, $\hat{B} = \hat{\hat{B}}$ $\quad$ (bzw. $H \subset \hat{H}$, $\hat{H} = \hat{\hat{H}}$)

gelten.

Satz 1.1.1) Gegeben sei eine Teilmenge $B \subset A$.

Behauptung: Für jedes $\sigma \in G$ gilt

(5) $\qquad \Gamma(A, \sigma B) = \sigma \Gamma(A,B) \sigma^{-1}$.

Beweis: Sei $\sigma \in G$. Nach Definition ist

$$\begin{aligned}
\Gamma(A,\sigma B) &= \\
&= \{ \tau \mid \tau \in G,\ (\tau\sigma) b = \tau(\sigma b) = \sigma b \text{ für jedes } b \in B \} = \\
&= \{ \tau \mid \tau \in G,\ (\sigma^{-1}\tau\sigma) b = b \text{ für jedes } b \in B \} = \\
&= \{ \tau \mid \tau \in G,\ \sigma^{-1}\tau\sigma \in \Gamma(A,B) \} = \\
&= \sigma \Gamma(A,B) \sigma^{-1} .
\end{aligned}$$

Satz 1.1.2) Gegeben sei eine Teilmenge $B \subset A$ mit $\hat{B} = B$.

Behauptung: Für jedes $\sigma \in G$ gilt

(6) $\qquad \widehat{\sigma B} = \sigma B$.

Beweis: Sei $\sigma \in G$. Nach Satz 1.1.1 und (3) hat man

(7) $$\widehat{\sigma B} = \mathfrak{F}(A, \sigma\Gamma(A,B)\sigma^{-1}).$$

Daraus folgt, dass für jedes Paar $(c,\tau) \in \widehat{\sigma B} \times \Gamma(A,B)$
$\sigma^{-1}c = (\tau\sigma^{-1})c = \tau(\sigma^{-1}c)$ ist. Damit ist
$\sigma^{-1}(\widehat{\sigma B}) \subset \mathfrak{F}(A,\Gamma(A,B)) = \hat{B} = B$ gezeigt,
also $\widehat{\sigma B} = \sigma B$.

Satz 1.1.3) Gegeben sei ein $\mathbb{Z}$-Untermodul B von A mit $\hat{B} = B$.
Behauptung: Folgende Aussagen sind äquivalent:
a) $\Gamma(A,B)$ ist ein Normalteiler in G;
b) B ist ein G-Untermodul von A.
Beweis von a) $\Rightarrow$ b): Da $\Gamma(A,B)$ ein Normalteiler in G ist, so muss nach Satz 1.1.1 für jedes $\sigma \in G$
$\Gamma(A,B) = \Gamma(A,\sigma B)$ sein. Andererseits ist nach Satz 1.1.2 für jedes $\sigma \in G$ $\widehat{\sigma B} = \sigma B$. Aus $\Gamma(A,B) = \Gamma(A,\sigma B)$, $B = \hat{B}$, $\widehat{\sigma B} = \sigma B$ folgt nach (3) $\sigma B = B$.
Beweis von b) $\Rightarrow$ a): Nach Satz 1.1.1 gilt für jedes $\sigma \in G$
$\sigma\Gamma(A,B)\sigma^{-1} = \Gamma(A,\sigma B) = \Gamma(A,B)$.

1.2. Die Ableitung eines G-Moduls.

Sei G eine Gruppe und A ein G-Modul.
Es ist trivial, dass $\mathfrak{F}(A,G)$ ein Untermodul des G-Moduls A ist. Daher ist $D(A) = A/\mathfrak{F}(A,G)$ ein G-Modul. D (A) heisse die Ableitung des G-Moduls A.
Weiter sei φ_A der kanonische G-Homomorphismus
$A \longrightarrow D(A) = A/\mathfrak{F}(A,G)$.
Wie man leicht sieht, ist

(8) $$\varphi_A^{-1}(\mathfrak{F}(D(A),G)) =$$
$$= \{a \mid a \in A,\ \sigma a - a \in \mathfrak{F}(A,G) \text{ für jedes } \sigma \in G\}.$$

Sei $a \in A$. Mit $\varrho(a)$ bezeichne man die Abbildung $G \to A$, welche definiert ist durch $[\varrho(a)](\sigma) = \sigma a - a$ für jedes $\sigma \in G$. Wenn $a \in \varphi_A^{-1}(\mathfrak{F}(D(A),G))$ ist, so gilt $\varrho(a) \in \mathrm{Hom}(G, \mathfrak{F}(A,G))$.

In der Tat, seien σ und τ beliebige Elemente aus G. Da $a \in \varphi_A^{-1}(\mathfrak{F}(D(A),G))$ ist, so muss wegen (8)

$$[\varrho(a)](\sigma) + [\varrho(a)](\tau) = \sigma a - a + \tau a - a = \sigma a - a + \sigma(\tau a - a) =$$
$$= (\sigma\tau)a - \sigma a + \sigma a - a = [\varrho(a)](\sigma\tau)$$

sein.

Die Abbildung $\varrho : \varphi_A^{-1}(\mathfrak{F}(D(A),G)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(G, \mathfrak{F}(A,G))$ ist $\mathbb{Z}$-linear. Weiter ist $\mathfrak{F}(A,G)$ der Kern von ϱ. Also existiert eine einzige injektive $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $\psi_A : \mathfrak{F}(D(A),G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(G, \mathfrak{F}(A,G))$, für welche

$$\varrho = \psi_A \circ (\varphi_A | \varphi_A^{-1}(\mathfrak{F}(D(A),G))) \tag{9}$$

ist.

Man identifiziere $\mathfrak{F}(D(A),G)$ mit $\psi_A(\mathfrak{F}(D(A),G))$ durch ψ_A.

Satz 1.2.1) Sei G eine endlich-erzeugbare Gruppe. Weiter sei A ein G-Modul, so dass $\mathfrak{F}(A,G)$ als $\mathbb{Z}$-Modul endlich-erzeugbar ist.

Behauptung: Die $\mathbb{Z}$-Moduln $\mathfrak{F}(D(A),G)$ und $\varphi_A^{-1}(\mathfrak{F}(D(A),G))$ sind endlich-erzeugbar.

Beweis: Einerseits kann man $\mathfrak{F}(D(A),G)$ nach den obigen Ausführungen als Untermodul des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathrm{Hom}(G,\mathfrak{F}(A,G))$ betrachten. Andererseits, da G und $\mathfrak{F}(A,G)$ endlich-erzeugbar sind, so muss auch $\mathrm{Hom}(G,\mathfrak{F}(A,G))$ endlich-erzeugbar sein. Also muss $\mathfrak{F}(D(A),G)$, als Untermodul eines endlich-erzeugbaren

$\mathbb{Z}$-Moduls, auch endlich-erzeugbar sein.

Satz 1.2.2) Sei G eine endliche Gruppe von der Ordnung n und A ein G-Modul.

Behauptung: Für jedes $\alpha \in \mathfrak{F}(D(A),G)$ ist $n\alpha = 0$.

Beweis: Sei $\alpha \in \mathfrak{F}(D(A),G)$ und $a \in \alpha$. Für jedes $\sigma \in G$ ist

$$\sigma\left(\sum_{\tau\in G} \tau a\right) = \sum_{\tau\in G} (\sigma\tau)a = \sum_{\tau\in G} \tau a \quad .$$

Daraus folgt $\sum_{\tau\in G} \tau a \in \mathfrak{F}(A,G)$ d.h., dass $n\alpha = \sum_{\tau\in G} \tau\alpha = 0$ ist.

Satz 1.2.3) Sei G eine endliche Gruppe.

Weiter sei A ein G-Modul, so dass $\mathfrak{F}(A,G)$ als $\mathbb{Z}$-Modul endlich-erzeugbar ist.

Behauptung: Die abelsche Gruppe $\mathfrak{F}(D(A),G)$ ist endlich.

Beweis: Einerseits ist nach Satz 1.2.1 $\mathfrak{F}(D(A),G)$ endlich-erzeugbar. Da andererseits, wenn n die Ordnung von G ist, nach Satz 1.2.2 $n\,\mathfrak{F}(D(A),G) = \{0\}$ gilt, so folgt die Behauptung.

Bemerkung 1) Man setze voraus, dass G auf A trivial operiert (d.h. $\sigma a = a$ für jedes Paar $(\sigma,a) \in G \times A$).

Sei $Z^1(G,A)$ die Gruppe aller homogenen 1-Cozyklen von G mit Koeffizienten in A.

Für jedes $f \in Z^1(G,A)$ sei die Abbildung $\varphi(f): G \to A$ definiert durch $[\varphi(f)](\sigma) = f(1,\sigma)$ für jedes $\sigma \in G$. Da G auf A trivial operiert, so muss für jedes $f \in Z^1(G,A)$ $\varphi(f) \in \mathrm{Hom}(G,A)$ sein.

Man sieht sofort, dass φ ein Isomorphismus von $Z^1(G,A)$ auf $\mathrm{Hom}(G,A)$ ist.

Andererseits, da G auf A trivial operiert, muss die erste Cohomologiegruppe $H^1(G,A) = Z^1(G,A)$ sein. Mittels φ kann man also

$H^1(G,A)$ mit $\mathrm{Hom}(G,A)$ identifizieren.

Bemerkung 2) Für jeden G-Modul A kann man die Gruppen $H^0(G,A)$ und $\mathfrak{F}(A,G)$ in natürlicher Weise identifizieren (siehe etwa [8], chap. VII, §2, p. 119, oder [7], chap. 10, 10. 6,p.222). Nach Bemerkung 1 ist $H^1(G,\mathfrak{F}(A,G)) = \mathrm{Hom}(G,\mathfrak{F}(A,G))$.
Die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F}(A,G) \longrightarrow A \longrightarrow D(A) = A/\mathfrak{F}(A,G) \longrightarrow 0$$

von G-Moduln induziert nach der allgemeinen Cohomologietheorie eine exakte Cohomologiesequenz

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F}(A,G) \xrightarrow{Jd_{\mathfrak{F}(A,G)}} \mathfrak{F}(A,G) \longrightarrow \mathfrak{F}(D(A),G) \xrightarrow{\delta^0}$$

$$\xrightarrow{\delta^0} \mathrm{Hom}(G,\mathfrak{F}(A,G)) \longrightarrow H^1(G,A) \longrightarrow \cdots \quad .$$

Man beachte, dass der Verbindungshomomorphismus δ^0 nichts anderes ist, als der am Anfang dieses Abschnitts definierte Homomorphismus ψ_A (siehe (9)).

1.3 Ableitungen höherer Ordnung eines G-Moduls.

Sei G eine Gruppe und A ein G-Modul.
Die Folge $D^0(A)$, $D^1(A)$, $D^2(A)$,... von G-Moduln sei folgendermassen definiert:

1) $D^0(A) = A$;

2) $D^{n+1}(A) = D(D^n(A)) = D^n(A)/\mathfrak{F}(D^n(A),G)$

für jedes $n \in \{0,1,2,\dots\}$.

Für jedes $n \in \{0,1,2,\dots\}$ heisse $D^n(A)$ die n-te Ableitung des G-Moduls A.
Weiter sei für jedes $n \in \{0,1,2,\dots\}$ $\varphi_A^{(n)}$ der kanonische Homomorphismus $D^n(A) \longrightarrow D^{n+1}(A) = D^n(A)/\mathfrak{F}(D^n(A),G)$.
Für jedes Paar $(n,m) \in \{0,1,\dots\} \times \{0,1,\dots\}$ mit $n \leq m$

sei $\varphi_A^{(n,m)}$ derjenige Homomorphismus $D^n(A) \longrightarrow D^m(A)$, welcher folgendermassen definiert ist:

$$(10) \qquad \varphi_A^{(n,m)} = \begin{cases} \varphi_A^{(m-1)} \circ \varphi_A^{(m-2)} \circ \ldots \circ \varphi_A^{(n)}, & \text{falls } n < m \\ Jd_{D^n(A)}, & \text{falls } n = m. \end{cases}$$

Wie man leicht sieht, gilt für jedes Tripel (l,m,n) von nichtnegativen ganzen Zahlen mit $l \leq m \leq n$ die Regel

$$(11) \qquad \varphi_A^{(l,n)} = \varphi_A^{(m,n)} \circ \varphi_A^{(l,m)} .$$

Satz 1.3.1) Sei G eine endlich-erzeugbare Gruppe.
Weiter sei A ein G-Modul, so dass $\mathfrak{T}(A,G)$ als $\mathbb{Z}$-Modul endlich-erzeugbar ist.
Behauptung: Für jedes natürliche n sind die $\mathbb{Z}$-Moduln $\mathfrak{T}(D^n(A),G)$ und $[\varphi_A^{(1,n)}]^{-1}(\mathfrak{T}(D^n(A),G))$ endlich-erzeugbar.
Beweis: Zuerst wird gezeigt, dass für jedes natürliche n der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathfrak{T}(D^n(A),G)$ endlich-erzeugbar ist. Dieses beweist man durch Induktion nach n, indem man Satz 1.2.1 benutzt. Der andere Teil der Behauptung folgt aus dem ersten Teil, indem man rückwärts Induktion macht.

Satz 1.3.2) Sei G eine endliche Gruppe.
Weiter sei A ein G-Modul, so dass $\mathfrak{T}(A,G)$ als $\mathbb{Z}$-Modul endlich-erzeugbar ist.
Behauptung: Für jedes natürliche n sind die abelschen Gruppen $\mathfrak{T}(D^n(A),G)$ und $[\varphi_A^{(1,n)}]^{-1}(\mathfrak{T}(D^n(A),G))$ endlich.
Beweis: Analog wie der Beweis von Satz 1.3.1.

1.4. Der Fall einer zyklischen Gruppe.

Satz 1.4.1) Sei G eine zyklische Gruppe und A ein G-Modul. Weiter sei σ ein erzeugendes Element von G, $\alpha \in D(A)$, n eine natürliche Zahl und $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$.

Behauptung: Folgende Aussagen sind äquivalent:

I) $\alpha \in [\varphi_A^{(1,n)}]^{-1}(\mathfrak{F}(D^n(A),G))$;

II) $\varphi_A^{(1,n-k)}((1-\sigma)^{k+1}\alpha) = 0$ (1).

Beweis: Der Satz wird durch Induktion nach k bewiesen.

Für k = o ist die Behauptung trivial.

Angenommen, die Behauptung sei für ein gewisses k richtig, $k < n-1$.

Es ist

$$\sigma\,\varphi_A^{(1,n-k-1)}((1-\sigma)^{k+1}\alpha) - \varphi_A^{(1,n-k-1)}((1-\sigma)^{k+1}\alpha) =$$

$$= \varphi_A^{(1,n-k-1)}(\sigma(1-\sigma)^{k+1}\alpha - (1-\sigma)^{k+1}\alpha) = \tag{12}$$

$$= -\varphi_A^{(1,n-k-1)}((1-\sigma)^{k+2}\alpha) \quad .$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $\alpha \in [\varphi_A^{(1,n)}]^{-1}(\mathfrak{F}(D^n(A),G))$ dann und nur dann, wenn

$$\varphi_A^{(1,n-k)}((1-\sigma)^{k+1}\alpha) = 0 \tag{13}$$

ist. Wegen $\varphi_A^{(1,n-k)} = \varphi_A^{(n-k-1,n-k)} \circ \varphi_A^{(1,n-k-1)}$ (siehe (11))

---

(1) $(1-\sigma)^{k+1}$ u.s.w. wird hier im $\mathbb{Z}$-Gruppenring von G betrachtet.

ist (13) äquivalent mit

(14) $$\varphi_A^{(1,n-k-1)}((1-\sigma)^{k+1}\alpha) \in \mathcal{F}(D^{n-k-1}(A),G) .$$

Nach (12) folgt daraus, da σ die Gruppe G erzeugt, dass $\alpha \in [\varphi_A^{(1,n)}]^{-1}(\mathcal{F}(D^n(A),G))$ gleichbedeutend ist mit

(15) $$\varphi_A^{(1,n-k-1)}((1-\sigma)^{k+2}\alpha) = 0 .$$

Damit ist die Behauptung von Satz 1.4.1 vollständig bewiesen.

Satz 1.4.2) Sei G eine zyklische Gruppe und A ein G-Modul. Weiter sei σ ein erzeugendes Element von G, $\alpha \in D(A)$ und n eine natürliche Zahl.
Behauptung: Folgende Aussagen sind äquivalent:

I) $\alpha \in [\varphi_A^{(1,n)}]^{-1}(\mathcal{F}(D^n(A),G))$;

II) $(1-\sigma)^n\alpha = 0$.

Beweis: Die Behauptung folgt aus Satz 1.4.1, indem man $k=n-1$ nimmt.

Satz 1.4.3) Sei G eine endliche zyklische Gruppe von der Ordnung $m > 1$ und A ein G-Modul.
Weiter sei $\alpha \in D(A)$ und $n \in \mathbb{Z}$.
Man setze

(16) $$d = \underset{0\le\nu\le m-1}{\text{g.g.T.}} \left(n + (-1)^\nu \binom{m-1}{\nu}\right)^{(2)} .$$

---

(2) g.g.T. bedeutet: grösster gemeinsamer Teiler.

Behauptung: Wenn $d\alpha = 0$ ist, so gilt

$$\alpha \in [\varphi_A^{(1,m-1)}]^{-1}(\mathfrak{F}(D^{m-1}(A), G))$$

Beweis: Sei σ ein erzeugendes Element von G. Nach Satz 1.4.2 ist $\alpha \in [\varphi_A^{(1,m-1)}]^{-1}(\mathfrak{F}(D^{m-1}(A), G))$ gleichbedeutend mit

$$(17) \qquad (1-\sigma)^{m-1}\alpha = 0 .$$

Andererseits ist $0 = \sum_{\nu=0}^{m-1}\sigma^\nu\alpha$, also $\sum_{\nu=0}^{m-1} n\sigma^\nu\alpha = 0$.

Daraus folgt

$$(18) \qquad (1-\sigma)^{m-1}\alpha = (1-\sigma)^{m-1}\alpha + \sum_{\nu=0}^{m-1} n\sigma^\nu\alpha =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m-1}\left((-1)^\nu\binom{m-1}{\nu} + n\right)\sigma^\nu\alpha .$$

Für jedes $\nu \in \{0,1,\ldots,m-1\}$ ist d ein Teiler von $n + (-1)^\nu\binom{m-1}{\nu}$. Wenn $d\alpha = 0$ ist, so muss nach (18) die Relation (17) gelten. Damit ist die Behauptung von Satz 1.4.3 vollständig bewiesen.

Satz 1.4.4) Dieselben Voraussetzungen wie in Satz 1.4.3.

Weiter sei s eine beliebige natürliche Zahl.

Behauptung: Wenn $d^s\alpha = 0$ ist, so gilt

$$\alpha \in [\varphi_A^{(1,s(m-1))}]^{-1}(\mathfrak{F}(D^{s(m-1)}(A), G)) .$$

Beweis: Man mache Induktion nach s.

Für s = 1 ist die Behauptung nach Satz 1.4.3 richtig.

Angenommen, die Behauptung sei für ein gewisses s richtig. Man setze voraus, dass $d^{s+1}\alpha = 0$ ist. Wegen $0 = d^{s+1}\alpha = d^{s}(d\alpha)$ muss nach Induktionsvoraussetzung

$$d\alpha \in [\varphi_A^{(1,s(m-1))}]^{-1}(\mathfrak{F}(D^{s(m-1)}(A),G))$$

sein. Also ist

$$d\,\varphi_A^{(s(m-1),s(m-1)+1)}(\varphi_A^{(1,s(m-1))}(\alpha)) = 0 \quad . \tag{19}$$

Daraus folgt (siehe (11))

$$d\,\varphi_A^{(1,s(m-1)+1)}(\alpha) = 0 \quad . \tag{20}$$

Wendet man Satz 1.4.3 auf den G-Modul $D^{s(m-1)}(A)$ statt A an, so folgt aus (20)

$$\varphi_A^{(1,s(m-1)+1)}(\alpha) \in [\varphi_A^{(s(m-1)+1,(s+1)(m-1))}]^{-1}(\mathfrak{F}(D^{(s+1)(m-1)}(A),G)) \tag{21}$$

(man beachte $\varphi_{D^{s(m-1)}(A)}^{(1,m-1)} = \varphi_A^{(s(m-1)+1,(s+1)(m-1))}$ und $D^{m-1}(D^{s(m-1)}(A)) = D^{(s+1)(m-1)}(A)$).

Aus (21) folgt

$$\alpha \in [\varphi_A^{(1,(s+1)(m-1))}]^{-1}(\mathfrak{F}(D^{(s+1)(m-1)}(A),G)) \quad . \tag{22}$$

Damit ist die Behauptung von Satz 1.4.4 vollständig bewiesen.

Satz 1.4.5) Sei p eine Primzahl, G eine zyklische p-Gruppe von der Ordnung $m > 1$ und A ein G-Modul.
Weiter sei s eine natürliche Zahl.

Behauptung: Für jedes $\alpha \in D(A)$ mit $p^s\alpha = 0$ gilt

$$\alpha \in [\varphi_A^{(1,s(m-1))}]^{-1}(\mathfrak{F}(D^{s(m-1)}(A),G)) .$$

Beweis: Sei $m = p^n$. Alle Zahlen $(-1)^\nu \binom{p^n-1}{\nu}$, wobei $\nu \in \{0,1,\ldots,p^n-1\}$ durchläuft, liegen in derselben Restklasse mod p (3) d.h. es existiert eine ganze Zahl l, so dass p ein gemeinsamer Teiler von den Zahlen $l + (-1)^\nu \binom{m-1}{\nu}$ $(\nu \in \{0,1,\ldots,m-1\})$ ist. Daraus folgt nach Satz 1.4.4 die Behauptung.

Satz 1.4.6) Sei p eine Primzahl und G eine zyklische p-Gruppe. Weiter sei A ein G-Modul, so dass $\mathfrak{F}(A,G)$ als $\mathbb{Z}$-Modul endlich-erzeugbar ist.

Behauptung: Für jede natürliche Zahl s ist die abelsche Gruppe

$$A_s = \{\alpha \mid \alpha \in D(A), p^s\alpha = 0\} \tag{23}$$

endlich.

Beweis: Sei m die Ordnung von G.

Falls $m = 1$ ist, so ist die Behauptung trivial. Man nehme an, dass $m > 1$ ist. Da $\mathfrak{F}(A,G)$ endlich-erzeugbar ist, so muss nach Satz 1.3.2 die abelsche Gruppe $[\varphi_A^{(1,s(m-1))}]^{-1}(\mathfrak{F}(D^{s(m-1)}(A),G))$ endlich sein. Andererseits ist nach Satz 1.4.5

$$A_s \subset [\varphi_A^{(1,s(m-1))}]^{-1}(\mathfrak{F}(D^{s(m-1)}(A),G)) .$$

Also ist A_s endlich.

---

(3) Für jedes $\nu \in \{0,1,\ldots,p^n-2\}$ ist $\binom{p^n}{\nu+1} = \binom{p^n-1}{\nu+1} + \binom{p^n-1}{\nu}$, also $-\binom{p^n-1}{\nu+1} \equiv \binom{p^n-1}{\nu} \pmod p$.
Multipliziert man die beiden Seiten der letzten Kongruenz mit $(-1)^\nu$, so erhält man die Kongruenz $(-1)^{\nu+1}\binom{p^n-1}{\nu+1} \equiv (-1)^\nu \binom{p^n-1}{\nu} \pmod p$ für jedes $\nu \in \{0,1,\ldots,p^n-2\}$.

§ 2. Allgemeines über die Änderung der Klassengruppe eines algebraischen Funktionenkörpers bei Konstantenerweiterung.

In diesem Paragraphen wird gezeigt, dass die Klassengruppe eines algebraischen Funktionenkörpers R mit dem Konstantenkörper K sich nicht ändert, wenn man R durch irgend eine Konstantenerweiterung von R bezüglich einer rein-transzendenten Erweiterung von K ersetzt. Folglich genügt es, dass man Probleme dieser Art nur bei algebraischen Erweiterungen von K betrachtet.

2.1. Kurze Zusammenfassung über wichtige Eigenschaften von Konstantenerweiterungen von algebraischen Funktionenkörpern.

In der ganzen Arbeit wird für jeden algebraischen Funktionenkörper R die Divisorengruppe von R (bzw. die Klassengruppe von R) mit $\mathfrak{D}_R$ (bzw. $\mathfrak{K}_R$) bezeichnet.

Sei K ein Körper und R ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper K.

Bekanntlich ist zu jeder Körpererweiterung L von K die Konstantenerweiterung R_L von R bezüglich L definiert. Dafür siehe z.B. ([3], chap. V, § 4, p. 88) oder ([4], § 36, p. 126). R_L ist ein algebraischer Funktionenkörper über L.

Sei L' der Konstantenkörper von R_L (d.h. die algebraische Hülle von L in R_L). Im allgemeinem stimmt L' nicht mit L überein. Bekanntlich gilt

(1) $$K = R \cap L' .$$

Ausserdem weiss man, dass L' rein-inseparabel über L ist. Wenn mindestens einer von den beiden Körpern R oder L separabel über K ist, so muss nach ([3], chap. V, § 4, Theorem 2, p. 91) $L' = L$ sein.

Falls R separabel über K ist, so ist die letzte Aussage ein Spezialfall von ([9], chap. I, Theorem 5, p.18). Bekanntlich ist der Einbettungshomomorphismus

(2) $$i_{RIR_L} : \mathfrak{D}_R \longrightarrow \mathfrak{D}_{R_L}$$

definiert. Durch den Homomorphismus (2) gehen Hauptdivisoren in Hauptdivisoren über. Also erhält man einen Homomorphismus

(3) $$j_{RIR_L} : \mathfrak{H}_R \longrightarrow \mathfrak{H}_{R_L} .$$

Sei M eine Körpererweiterung von L. Wie man sofort sieht, gilt die Regel

(4) $$j_{RIR_M} = j_{R_LIR_M} \cdot j_{RIR_L} .$$

Es ist klar, dass i_{RIR_L} injektiv ist. Mittels i_{RIR_L} kann man also $\mathfrak{D}_R$ mit $i_{RIR_L}(\mathfrak{D}_R)$ identifizieren.
Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, dass unter einer gewissen Voraussetzung über den Körper L der Homomorphismus j_{RIR_L} injektiv ist.

2.2. Einbettung.

Satz 2.2.1) Sei R ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper K.
Weiter sei L eine separable Körpererweiterung von K.
Behauptung: Der Homomorphismus j_{RIR_L} (siehe (3)) ist injektiv.
Beweis: Sei $\alpha \in \mathfrak{H}_R$ mit $j_{RIR_L}(\alpha) = 0$. Weiter sei $\mathfrak{a} \in \alpha$ beliebig. Laut Definition ist $\mathfrak{a} \in j_{RIR_L}(\alpha) = 0$, d.h. es existiert ein $x_o \in R_L^{\times}$ (1) mit $\mathfrak{a} = (x_o)_{R_L}$.
x_o, als durch $\mathfrak{a}$ teilbares Element, lässt sich nach ([3], chap. V, § 6, Theorem 4, p.96) als eine endliche Linearkombination

(1) Allgemein, wenn K ein Körper ist, so ist per Definition $K^{\times}$ die multiplikative Gruppe $K - \{0\}$.

(5) $x_o = \sum_j \lambda_j a_j$ (alle $\lambda_j \in L$, alle $a_j \in R^\times$ mit $a_j \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}$)

darstellen.

Da a_i durch $\mathfrak{a} = (x_o)_{R_L}$ teilbar ist, so muss $\lambda = \frac{a_i}{x_o} \in L$ sein.

Also gilt

(6) $$(a_i)_{R_L} = (x_o)_{R_L} = \mathfrak{a} .$$

Andererseits ist $a_i \in R^\times$. Damit ist die Behauptung von Satz 2.2.1 vollständig bewiesen.

Man beachte, dass Satz 2.2.1 ein Spezialfall von ([4], §38, Corollary of Theorem 4, p.162) ist. Da aber bei allen denjenigen Sätzen, auf die es in dieser Arbeit ankommt, L immer separabel über K ist, so ist es nicht nötig, dass man die Voraussetzungen von Satz 2.2.1 abschwächt.

Folgerung) Sei R ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper K.

Weiter sei L eine rein-transzendente Körpererweiterung von K.

Behauptung: Der Homomorphismus $j_{R|R_L}$ ist injektiv.

Beweis: Bekanntlich ist jede rein-transzendente Körpererweiterung von K auch separabel.

Überhaupt kann man, falls L eine separable Körpererweiterung von K ist, nach Satz 2.2.1 $\mathfrak{k}_R$ als Untergruppe von $\mathfrak{k}_{R_L}$ betrachten.

2.3. Der Fall einer rein-transzendenten Körpererweiterung L von K.

Satz 2.3.1) Sei R ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper K.

Weiter sei $L = K(x)$ eine einfache transzendente Körpererweiterung von K.

Behauptung: Es ist $\mathfrak{K}_{R_L} = \mathfrak{K}_R$.

Beweis: Sei Π die Menge aller Primdivisoren von R_L .

Weiter sei für jedes $p \in \Pi$ $\mathfrak{o}_p$ (bzw. $\mathfrak{m}_p$) der Bewertungsring von p in R_L (bzw. das maximale Ideal von $\mathfrak{o}_p$).

Man setze

$$\Pi_1 = \{ p \mid p \in \Pi, R \not\subset \mathfrak{o}_p \} \tag{7}$$

und

$$\Pi_2 = \Pi - \Pi_1 \quad . \tag{8}$$

Für jeden Divisor $\mathfrak{a} = \sum_{p \in \Pi} u_p(\mathfrak{a}) \cdot p \in \mathfrak{d}_{R_L}$ mit $\mathrm{Supp}(\mathfrak{a}) \subset \Pi_1$[2] ist nach ([3], chap.V, § 5, Corollary 2 of Theorem 3, p.95) $\mathfrak{a} \in \mathfrak{d}_R$.

Nach den Betrachtungen in ([3], chap.I, § 3, p.3), angewandt auf die einfache transzendente Körpererweiterung $R_L = R(x)$ von R, existiert zu jedem Primdivisor $p \in \Pi_2$ ein irreduzibles Polynom $f_p \in R[x]$ mit folgenden Eigenschaften:

I) $\mathfrak{m}_p = \mathfrak{o}_p f_p$;

II) Für jeden Bewertungsring A in R_L mit $R \subset A$, $A \neq R_L$, $A \neq \mathfrak{o}_p$, $x \in A$ ist f_p eine Einheit in A.

Nach I) ist $v_p(f_p) = 1$ (v_p ist die zu dem Primdivisor p gehörige normierte diskrete Bewertung). Wegen $x \in L$ ist nach II) für jeden Primdivisor $q \in \Pi_2$ mit $q \neq p$ $v_q(f_p) = 0$.

Man ordne jedem Primdivisor $p \in \Pi_2$ ein irreduzibles Polynom $f_p \in R[x]$ mit den Eigenschaften I) und II) zu.

Sei $\alpha \in \mathfrak{K}_{R_L}$ und $\mathfrak{a} = \sum_{p \in \Pi} u_p(\mathfrak{a}) \cdot p \in \alpha$ beliebig.

Man setze

$$f = \prod_{p \in \Pi_2} f_p^{u_p(\mathfrak{a})} \quad . \tag{9}$$

Für jedes $p \in \Pi_2$ ist nach den letzten Ausführungen

---

(2) $\mathrm{Supp}(\mathfrak{a}) = \{ p \mid p \in \Pi, u_p(\mathfrak{a}) \neq 0 \}$.

(10) $$v_p(f) = \sum_{\mathfrak{q} \in \Pi_2} u_{\mathfrak{q}}(\alpha) v_p(f_{\mathfrak{q}}) = u_p(\alpha) .$$

Damit ist gezeigt, dass Supp $(\alpha - (f)_{R_L}) \subset \Pi_1$ ist.
Daraus folgt nach den obigen Ausführungen, dass $\alpha - (f)_{R_L} \in \mathfrak{D}_R$ ist.
Andererseits ist $\alpha - (f)_{R_L} \in \alpha$, also $\alpha \in \mathfrak{k}_R$.

Satz 2.3.2) Sei R ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper K.
Weiter sei L eine rein-transzendente Körpererweiterung von K.
Behauptung: Es ist $\mathfrak{k}_{R_L} = \mathfrak{k}_R$.
Beweis: Nach dem Hilfssatz aus (§ 3, Abschnitt 3.1) kann man o.B.d.A. annehmen, dass L eine endliche Erweiterung von K ist. Die Behauptung folgt durch Induktion nach dem Transzendenzgrad, indem man Satz 2.3.1 benutzt.

2.4. Eine Anwendung von Satz 2.3.2.

Sei R ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper K.
Weiter sei L eine separabel-erzeugbare Körpererweiterung von K.
Frage 1) Was kann man über die Struktur der Faktorgruppe $\mathfrak{k}_{R_L} / \mathfrak{k}_R$ aussagen?
Nach Voraussetzung besitzt L eine Transzendenzbasis B über K, so dass L algebraisch und separabel über $L' = K(B)$ ist.
Andererseits ist nach Satz 2.3.2 $\mathfrak{k}_{R_{L'}} = \mathfrak{k}_R$. Also ist es keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn man die Frage 1 nur in dem Fall behandelt, wo L eine separable und algebraische Körpererweiterung von K ist.
Man setze voraus, dass L separabel und algebraisch über K ist.
Frage 2) Wenn $\mathfrak{k}_R$ endlich-erzeugbar ist, ist auch dann die Faktorgruppe $\mathfrak{k}_{R_L} / \mathfrak{k}_R$ endlich-erzeugbar?
Die Antwort lautet "nein", wie folgendes Gegenbeispiel zeigt:

Sei Ω ein algebraisch-abgeschlossener Körper von der Charakteristik 0, welcher über seinem Primkörper $\mathbb{P}$ unendlichen Transzendenzgrad hat.

Weiter sei B eine Transzendenzbasis von Ω über $\mathbb{P}$.

Weil die Charakteristik 0 ist, ist Ω separabel über $K = \mathbb{P}(B)$.

Sei R ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper $\mathbb{P}$ vom Geschlecht $g > 0$.

Nach ([6], chap.II, Théorème 3, p.146) ist die Gruppe $\mathfrak{K}_R$ endlich-erzeugbar, also auch $\mathfrak{K}_{R_K}$ endlich-erzeugbar (Satz 2.3.2).

Andererseits ist nach ([10], Corollaire 1 de Théorème 33, p.127) für jedes natürliche n die Anzahl aller $\alpha \in \mathfrak{K}_{R_\Omega}$ mit $n\alpha = 0$ gleich n^{2g} (da Ω separabel über $\mathbb{P}$ ist, muss das Geschlecht von R_Ω gleich g sein). Damit ist gezeigt, dass der Torsionsbestandteil $T(\mathfrak{K}_{R_\Omega})$ von $\mathfrak{K}_{R_\Omega}$ eine unendliche Gruppe ist. Daraus folgt, dass $\mathfrak{K}_{R_\Omega}$ nicht endlich-erzeugbar ist. Also ist die Faktorgruppe $\mathfrak{K}_{R_\Omega}/\mathfrak{K}_{R_K}$ nicht endlich-erzeugbar, da $\mathfrak{K}_{R_K}$ endlich-erzeugbar ist.

Hilfssatz) Sei G eine Gruppe mit folgenden Eigenschaften:

1) Für jedes natürliche n ist die Menge

$$G_n = \{ a \mid a \in G,\ a^n = 1 \} \tag{11}$$

endlich;

2) $\lim_{n \to \infty} |G_n| = \infty$ [3].

Weiter sei H ein abelscher und endlich-erzeugbarer Normalteiler von G, so dass die Faktorgruppe G/H abelsch ist.

Behauptung: Für jedes natürliche n existiert ein $\alpha_n \in G/H$ mit $O(\alpha_n) = n$. [4]

---

(3) Allgemein bezeichnet man, wenn A eine Menge ist, mit $|A|$ die Mächtigkeit von A.

(4) Für jedes a aus einer Gruppe A bezeichnet man mit $O(a)$ die Ordnung von a.

Beweis: Da H abelsch und endlich-erzeugbar ist, so muss der Torsionsbestandteil $T(H)$ von H eine endliche Gruppe sein.

Sei $m = |T(H)|$.

Sei p eine Primzahl.

Man setze

$$G'_p = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{p^n} \quad . \tag{12}$$

Es wird gezeigt, dass für jedes natürliche s ein $a_s \in G'_p$ mit $a_s^{p^s} \notin H$ existiert. Angenommen, es gäbe ein natürliches s_o, so dass für jedes $a \in G'_p$ $a^{p^{s_o}} \in H$ ist. Für jedes $a \in G'_p$ sei $\sigma(a^{p^{s_o}}) = p^{s_a}$.

Sei $a \in G'_p$. Da $a^{p^{s_o}} \in T(H)$ ist, muss p^{s_a} ein Teiler von m sein. Damit ist gezeigt, dass ein natürliches t mit $G'_p \subset G_{p^{s_o+t}}$ existiert. Das ist wegen 1) und 2) unmöglich.

Sei s eine natürliche Zahl. Nach den vorhergehenden Überlegungen wähle man ein $a_s \in G'_p$ mit $a_s^{p^s} \notin H$. Sei α'_s die Restklasse von a_s in G/H . Man hat $\alpha_s'^{p^s} \neq 1$ und $\sigma(\alpha'_s)$ ist eine Potenz von p. Es ist $\sigma(\alpha'_s) = p^{n_s}$ mit $s < n_s$. Also gilt $\sigma(\alpha'^{p^{n_s-s}}) = p^s$. Damit ist die Behauptung für jede Primzahlpotenz bewiesen. Also gilt sie auch für jedes natürliche n, da G/H abelsch ist.

Satz 2.4.1) Sei Ω ein algebraisch-abgeschlossener Körper von der Charakteristik 0, welcher über seinem Primkörper $\mathbb{P}$ unendlichen Transzendenzgrad hat, E ein Unterkörper von Ω , welcher eine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{P}$ ist,(5) und B eine Transzendenzbasis von Ω über E.

Man setze $K = E(B)$.

Weiter sei R ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Konstan-

(5) d.h. E geht durch Adjunktion von endlich vielen Elementen aus $\mathbb{P}$ hervor.

tenkörper E von positivem Geschlecht.

Behauptung: Zu jeder natürlichen Zahl n existiert ein $\alpha_n \in \mathfrak{K}_{R_\Omega} / \mathfrak{K}_{R_K}$ von der Ordnung n.

Beweis: Nach Satz 2.3.2 ist $\mathfrak{K}_{R_K} = \mathfrak{K}_R$. Daraus folgt nach ([6], chap.II, Théorème 3, p.146), dass $\mathfrak{K}_{R_K}$ endlich-erzeugbar ist. Andererseits ist für jedes natürliche n die Anzahl aller $a \in \mathfrak{K}_{R_\Omega}$ mit $na = 0$ gleich n^{2g}(g ist das Geschlecht von R).[6] Daraus folgt nach dem letzten Hilfssatz, angewandt auf $G = \mathfrak{K}_{R_\Omega}$ und $H = \mathfrak{K}_{R_K}$, die Behauptung.

§ 3. Änderung der Klassengruppe eines algebraischen Funktionenkörpers bei galoisscher Konstantenerweiterung.

3.1. Konjugierte Divisoren.

Folgender bekannter Satz wird in § 3 wesentlich benutzt:

Satz 3.1.1) Sei R ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper K.

Weiter sei L eine algebraische und separable Körpererweiterung von K.

Behauptung: Jeder Primdivisor $\mathfrak{p}$ von R_L ist über R unverzweigt.

Beweis: Da $R_L = RL$ ist, so ist die Behauptung eine unmittelbare Folgerung von ([4], § 35, Lemma 1, p.124).

Sei R ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper K.

Weiter sei L eine algebraische und separable Körpererweiterung von K.

---

(6) im Falle g = 1 vgl. auch ([5], Seite 57).

Für jeden Primdivisor $\mathfrak{p}$ von R_L bezeichne man im ganzen Paragraphen mit $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ (bzw. $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$) den Bewertungsring von $\mathfrak{p}$ in R_L (bzw. das maximale Ideal von $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$).

Da L separabel über K ist, so muss der Grad eines jeden Divisors $\mathfrak{a} \in \mathfrak{J}_R$ in R_L derselbe sein, wie sein Grad in R ([3], chap. V, § 4, Corollary of Theorem 2, p.92).[1] Daraus folgt, dass über jedem Primdivisor $\mathfrak{p}$ ersten Grades von R genau ein Primdivisor $\mathfrak{P}$ von R_L liegt. Ausserdem ist dieser Primdivisor $\mathfrak{P}$ vom Grade 1, d.h., dass der Restklassenkörper $\mathfrak{o}_\mathfrak{P}/\mathfrak{m}_\mathfrak{P} = L$ ist.

Man setze voraus, dass L eine galoissche Körpererweiterung von K ist.

Mit $\Gamma(L,K)$ bezeichne man die Galoisgruppe von L nach K (vgl. 1.1, (2)).

Da $K = L \cap R$ ist, so gilt nach dem Verlagerungssatz der Galoistheorie ([2], chap. V, § 10, Nr. 4, Théorème 1, p.149):

1) R_L ist galoissch über R;

2) Für jedes $\sigma \in \Gamma(R_L, R)$ ist $\sigma|L \in \Gamma(L,K)$;

3) Die Abbildung $\varphi : \Gamma(R_L,R) \longrightarrow \Gamma(L,K)$, welche definiert ist durch $\varphi(\sigma) = \sigma|L$ für jedes $\sigma \in \Gamma(R_L,R)$, ist ein Isomorphismus von $\Gamma(R_L,R)$ auf $\Gamma(L,K)$.

Mittels φ identifiziere man $\Gamma(R_L,R)$ mit $\Gamma(L,K)$.

Sei $\sigma \in \Gamma(L,K)$ und $\mathfrak{p}$ ein Primdivisor von R_L. Die Abbildung $x \longrightarrow \nu_\mathfrak{p}(\sigma^{-1}(x))$ $(x \in R_L)$ ist eine normierte diskrete Bewertung

---

(1) Falls ausserdem L endlich über K ist, so folgt diese Behauptung auch aus ([3], chap. IV, § 7, Lemma 1, p.65) und ([3], chap. V, § 4, Corollary 1 of Theorem 1, p.90). Da in diesem Fall R_L eine endliche, separable, algebraische Körpererweiterung von R ist, kann man in dem Beweis von ([3], chap. IV, § 7, Lemma 1, p.65) den Satz von Riemann-Roch und den Satz von Riemann vermeiden, indem man ([11], Proposition 2-5-8 (ii), p.67) und ([11], Lemma 2-4-2 (iv), p.55) benutzt.

von R_L, welche auf L trivial ist.[2] Also definiert sie einen Primdivisor σp von dem Funktionenkörper $R_L(\sigma_{\sigma p} = \sigma(\sigma_p))$.
Damit lässt sich die Divisorengruppe $\mathfrak{D}_{R_L}$ als $\Gamma(L,K)$ -Modul auffassen.
Ist $\mathfrak{A}$ ein beliebiger Divisor von R_L, so heissen die $\sigma\mathfrak{A}$, wobei $\sigma \in \Gamma(L,K)$ durchläuft, die zu $\mathfrak{A}$ konjugierten Divisoren.

Satz 3.1.2) Sei R ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper K.
Weiter sei L eine galoissche Körpererweiterung von K.
Behauptung: Es ist $\mathfrak{D}_R = \mathcal{F}(\mathfrak{D}_{R_L}, \Gamma(L,K))$ (siehe 1.1, (1)).
Beweis: Die Behauptung von Satz 3.1.2 folgt unmittelbar aus Satz 3.1.1 und ([3], chap. IV, § 2, Theorem 2, p.54).

Satz 3.1.3) Sei R ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper K.
Weiter sei L eine endliche separable algebraische Körpererweiterung von K.
Behauptung: Für jeden Divisor $\mathfrak{A} \in \mathfrak{D}_{R_L}$ existiert ein kleinster Zwischenkörper $K \subset L_{\mathfrak{A}} \subset L$ mit $\mathfrak{A} \in \mathfrak{D}_{R_{L_{\mathfrak{A}}}}$
Beweis: Sei $\mathfrak{A} \in \mathfrak{D}_{R_L}$ und L' die kleinste galoissche Körpererweiterung von K, welche L enthält. Man setze

(1) $$\Gamma_{\mathfrak{A}} = \{\sigma \mid \sigma \in \Gamma(L',K),\ \sigma\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\}.$$ [3]

Nach dem Hauptsatz der Galoistheorie ist $\Gamma_{\mathfrak{A}} = \Gamma(L', L_{\mathfrak{A}})$, wobei

---

(2) Für jeden Primdivisor p von R_L bezeichnet man mit v_p die zu p gehörige normierte diskrete Bewertung von R_L.

(3) Nach (1.1,(2)) ist $\Gamma_{\mathfrak{A}} = \Gamma(\mathfrak{D}_{R_{L'}}, \{\mathfrak{A}\})$.

$L_{\mathfrak{A}}$ der Fixkörper von $\Gamma_{\mathfrak{A}}$ in L'ist. Da L'galoissch über K ist, so muss auch L'galoissch über $L_{\mathfrak{A}}$ sein.

Andererseits ist $R_{L'} = (R_{L_{\mathfrak{A}}})_{L'}$.

Wendet man Satz 3.1.2 auf das Paar $(R_{L_{\mathfrak{A}}}, L')$ an, so folgt $\mathfrak{A} \in \mathfrak{d}_{R_{L_{\mathfrak{A}}}}$.

Nun sei M ein Unterkörper von L mit $K \subset M$ und $\mathfrak{A} \in \mathfrak{d}_{R_M}$.

Wegen $\mathfrak{A} \in \mathfrak{d}_{R_M}$ ist $\Gamma(L', M) \subset \Gamma(L', L_{\mathfrak{A}})$, also $M \supset L_{\mathfrak{A}}$.

Damit ist die Behauptung vollständig bewiesen.

Hilfssatz) Sei R ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper K.

Weiter sei L = K(B) eine Körpererweiterung von K.

Behauptung: Zu jedem Divisor $\mathfrak{A} \in \mathfrak{d}_{R_L}$ existiert eine endliche Teilmenge $B_{\mathfrak{A}} \subset B$ mit $\mathfrak{A} \in \mathfrak{d}_{R_{K(B_{\mathfrak{A}})}}$.

Beweis: Seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ zwei verschiedene Primdivisoren von R_L .

Wie man sofort sieht, existiert eine endliche Teilmenge $B' \subset B$, so dass $\mathfrak{p}_1 | R_{K(B')} \neq \mathfrak{p}_2 | R_{K(B')}$ ist. Daraus folgt durch Induktion, dass wenn $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_m$ m verschiedene Primdivisoren von R_L sind, so existiert eine endliche Teilmenge $B'' \subset B$, so dass $\mathfrak{p}_i | R_{K(B'')} \neq \mathfrak{p}_j | R_{K(B'')}$ für (i,j=1,...,m)und i≠j ist.

Sei $\mathfrak{p}$ ein beliebiger Primdivisor von R_L und t eine Ortsuniformisierende von $\mathfrak{p}$. Man wähle eine endliche Teilmenge $B_o \subset B$ mit $t \in R_{K(B_o)}$. Also liegt $\mathfrak{p}$ über einem Primdivisor $\mathfrak{P}$ von $R_{K(B_o)}$. Nach ([3],chap.IV,§ 1, Theorem 1,p.52)(4) existieren nur endlich viele Primdivisoren von R_L, welche über $\mathfrak{P}$ liegen. Seien $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_k$

---

(4)Von allen Sätzen, welche Auskunft über das Geschlecht eines algebraischen Funktionenkörpers geben, wird in dem Beweis von ([3], chap.IV,§ 1, Theorem 1,p.52) nur der Satz von Riemann benutzt.

sämtliche Primdivisoren von R_L (alle paarweise verschieden), welche über $\mathfrak{p}$ liegen. Nach den obigen Betrachtungen existiert eine endliche Teilmenge $B'' \subset B$, so dass alle Primdivisoren $\mathfrak{P}_1 | R_{K(B'')}$, $\mathfrak{P}_2 | R_{K(B'')}$, $\cdots$, $\mathfrak{P}_k | R_{K(B'')}$ von $R_{K(B'')}$ paarweise verschieden sind. Man setze $B_p = B_o \cup B''$. Die Primdivisoren $\mathfrak{P}_1 | R_{K(B_p)}$, $\cdots$, $\mathfrak{P}_k | R_{K(B_p)}$ von $R_{K(B_p)}$ sind paarweise verschieden.

Da t Ortsuniformisierende von $\mathfrak{p}$ und $t \in R_{K(B_p)}$ ist, so muss $\mathfrak{p}$ über $R_{K(B_p)}$ unverzweigt sein. Also ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} | R_{K(B_p)}$.
Damit ist die Behauptung vollständig bewiesen.

Satz 3.1.4) Sei R ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper K.
Weiter sei L eine separable algebraische Körpererweiterung von K.
Behauptung: Für jeden Divisor $\mathfrak{A} \in \mathfrak{D}_{R_L}$ existiert ein kleinster Zwischenkörper $K \subset L_{\mathfrak{A}} \subset L$ mit $\mathfrak{A} \in \mathfrak{D}_{R_{L_{\mathfrak{A}}}}$.
Beweis: Sei $\mathfrak{A} \in \mathfrak{D}_{R_L}$ und M ein Unterkörper von L mit $K \subset M$ und $\mathfrak{A} \in \mathfrak{D}_{R_M}$. Nach dem letzten Hilfssatz existiert ein Zwischenkörper $K \subset M' \subset M$ mit $\mathfrak{A} \in \mathfrak{D}_{R_{M'}}$, welcher über K endlich ist.
Nun sei L' ein Unterkörper von L mit folgenden Eigenschaften:
I) L' ist eine endliche Körpererweiterung von K;
II) Der Körpergrad $[L' : K]$ ist minimal;
III) $\mathfrak{A} \in \mathfrak{D}_{R_{L'}}$.
Wendet man den Satz 3.1.3 auf das Paar $(R, M'L')$ an, so folgt $L' \subset M'$, da der Körpergrad $[L' : K]$ minimal ist.
Damit ist die Behauptung vollständig bewiesen.

Satz 3.1.5) Dieselben Voraussetzungen wie in Satz 3.1.4 .

Weiter sei $\mathcal{A}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{d}_{R_L}$.

Behauptung: Es existiert ein kleinster Zwischenkörper

$K \subset L_{\mathcal{A}} \subset L$ mit $\mathcal{A} \subset \mathfrak{d}_{R_{L_{\mathcal{A}}}}$.

Beweis: Für jeden Divisor $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}$ sei nach Satz 3.1.4 $L_{\mathfrak{a}}$ der kleinste Unterkörper von L mit $K \subset L_{\mathfrak{a}}$ und $\mathfrak{a} \in \mathfrak{d}_{R_{L_{\mathfrak{a}}}}$. Der Körper $K(\bigcup_{\mathfrak{a} \in \mathcal{A}} L_{\mathfrak{a}})$ besitzt die gewünschte Eigenschaft.

Sei L eine galoissche Körpererweiterung von K.

Für jedes Paar $(\sigma, x) \in \Gamma(L,K) \times R_L^{\times}$ gilt

(2) $$(\sigma(x))_{R_L} = \sigma \cdot (x)_{R_L} .$$

Damit ist gezeigt, dass alle Hauptdivisoren von R_L einen Untermodul des $\Gamma(L,K)$-Moduls $\mathfrak{d}_{R_L}$ bilden. Daher ist $\check{\mathfrak{d}}_{R_L}$ ein $\Gamma(L,K)$-Modul.

3.2. Galoisbetrachtungen in dem $\Gamma(L,K)$-Modul $\check{\mathfrak{d}}_{R_L}$.

Satz 3.2.1) Sei R ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper K, der mindestens einen Primdivisor ersten Grades besitzt.

Weiter sei L eine galoissche Körpererweiterung von K.

Behauptung: Es ist

(3) $$\check{\mathfrak{d}}_R = \mathfrak{F}(\check{\mathfrak{d}}_{R_L}, \Gamma(L,K)) .$$

Erster Beweis:[5] Sei $\alpha \in \mathfrak{F}(\check{\mathfrak{d}}_{R_L}, \Gamma(L,K))$. Nach dem letzten Hilfssatz existiert ein Zwischenkörper $K \subset L' \subset L$ mit folgenden Eigenschaften:

---

(5) Falls ausserdem L endlich über K ist, so kann man im ersten Beweis von Satz 3.2.1 den Satz von Riemann-Roch und den Satz von Riemann vermeiden (z.B. siehe Fussnote (1) aus Abschnitt 3.1.). Nach dem Hilfssatz aus Abschnitt 3.1 lässt sich der allgemeine auf den endlichen Fall zurückführen. Also benutzt der erste Beweis von Satz 3.2.1 nicht den Satz von Riemann-Roch (Fussnote (4) aus 3.1).

I) L'ist eine endliche Körpererweiterung von K;

II) $\alpha \in \mathfrak{k}_{R_{L'}}$.

Da nach Voraussetzung L galoissch über K ist, so kann man offenbar annehmen, dass auch L' galoissch über K ist.

Andererseits ist nach derselben Voraussetzung $\alpha \in \mathfrak{F}(\mathfrak{k}_{R_{L'}}, \Gamma(L', K))$.

Also kann man o.B.d.A. annehmen, dass L eine endliche Körpererweiterung von K ist.

Sei $\mathfrak{p}$ ein Primdivisor ersten Grades von R. Wegen $\mathfrak{p} \in \mathfrak{D}_R$ ist

$$\sigma \mathfrak{p} = \mathfrak{p} \tag{4}$$

für jedes $\sigma \in \Gamma(L, K)$.

Nun sei $\mathfrak{A} = \sum_{\mathfrak{P}} v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{A})\mathfrak{P} \in \alpha$ beliebig. Man kann ein $x \in R_L^{\times}$ mit $v_{\mathfrak{p}}(x) = v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{A})$ wählen.[6] Für den Divisor $\tilde{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} - (x)_{R_L}$ gilt

$$v_{\mathfrak{p}}(\tilde{\mathfrak{A}}) = v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{A}) - v_{\mathfrak{p}}(x) = 0 . \tag{5}$$

Ausserdem ist $\tilde{\mathfrak{A}} \in \alpha$.

Wegen (4) und (5) gilt für jedes $\sigma \in \Gamma(L, K)$

$$v_{\mathfrak{p}}(\sigma \tilde{\mathfrak{A}}) = 0 . \tag{6}$$

Da $\alpha \in \mathfrak{F}(\mathfrak{k}_{R_L}, \Gamma(L, K))$ ist, so kann man zu jedem $\sigma \in \Gamma(L, K)$ ein $x_\sigma \in R_L^{\times}$ mit

$$\sigma \tilde{\mathfrak{A}} = \tilde{\mathfrak{A}} + (x_\sigma)_{R_L} \tag{7}$$

wählen. Aus (5), (6) und (7) folgt für jedes $\sigma \in \Gamma(L, K)$

$$v_{\mathfrak{p}}(x_\sigma) = v_{\mathfrak{p}}(\sigma\tilde{\mathfrak{A}}) - v_{\mathfrak{p}}(\tilde{\mathfrak{A}}) = 0 . \tag{8}$$

Da $\mathfrak{p}$ ein Primdivisor ersten Grades in R_L ist, so muss $x_\sigma(\mathfrak{p}) \in L^{\times}$ sein![7]

Für jedes $\sigma \in \Gamma(L, K)$ setze man

$$\varphi(\sigma) = \frac{x_\sigma}{x_\sigma(\mathfrak{p})} . \tag{9}$$

---

(6) Da $\mathfrak{p}$ in R vom Grade 1 ist, so muss auch $\mathfrak{p}$ ein Primdivisor ersten Grades in R_L sein (siehe 3.1).

(7) Für jedes $z \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ ist $z(\mathfrak{p})$ die Restklasse von z in dem Restklassenkörper $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$.

Sei $\sigma \in \Gamma(L,K)$. Man hat

(10) $$[\varphi(\sigma)]\,(\mathfrak{P}) = 1 .$$

Da $x_\sigma(\mathfrak{P}) \in L^\times$ ist, gilt

(11) $$(x_\sigma)_{R_L} = (\varphi(\sigma))_{R_L} .$$

Für jedes $\sigma \in \Gamma(L,K)$ folgt aus (7) und (11)

(12) $$\sigma\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha} + (\varphi(\sigma))_{R_L} .$$

Nun ist für jedes Paar $(\sigma,\tau) \in \Gamma(L,K) \times \Gamma(L,K)$

(13) $$\sigma(\tau\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}) + (\sigma\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}) = (\sigma\circ\tau)\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha} .$$

Also ist wegen (2), (12) und (13)

(14) $$\begin{aligned}(\varphi(\sigma\circ\tau))_{R_L} &= \sigma(\varphi(\tau))_{R_L} + (\varphi(\sigma))_{R_L} = \\ &= (\sigma(\varphi(\tau)))_{R_L} + (\varphi(\sigma))_{R_L} = \\ &= (\sigma(\varphi(\tau))\cdot\varphi(\sigma))_{R_L} .\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass für jedes Paar $(\sigma,\tau) \in \Gamma(L,K) \times \Gamma(L,K)$

(15) $$\lambda_{\sigma,\tau} = \frac{\varphi(\sigma\circ\tau)}{\sigma(\varphi(\tau))\,\varphi(\sigma)} \in L^\times$$

gilt.

Andererseits hat man wegen (4) und (10)

(16) $$\lambda_{\sigma,\tau} = \lambda_{\sigma,\tau}(\mathfrak{P}) = \frac{[\varphi(\sigma\circ\tau)](\mathfrak{P})}{[\sigma(\varphi(\tau))](\mathfrak{P})\cdot[\varphi(\sigma)](\mathfrak{P})} = 1 .$$

Also gilt für jedes Paar $(\sigma,\tau) \in \Gamma(L,K) \times \Gamma(L,K)$ die Relation

(17) $$\varphi(\sigma\circ\tau) = \sigma(\varphi(\tau))\cdot\varphi(\sigma) .$$

Wegen (17) kann man ([1], Theorem 21, p.58) auf die Abbildung φ anwenden. Damit ist gezeigt, dass ein $z \in R_L^\times$ existiert, so dass

(18) $$\varphi(\sigma) = \frac{\sigma(z)}{z}$$

für jedes $\sigma \in \Gamma(L,K)$ ist.

Man setze $\hat{\alpha} = \tilde{\alpha} - (z)_{R_L}$.

Einerseits ist $\hat{\alpha} \in \alpha$.

Andererseits ist für jedes $\sigma \in \Gamma(L,K)$

$$\sigma\hat{\alpha} = \sigma\tilde{\alpha} - \sigma(z)_{R_L} =$$

(19) $$= \sigma\tilde{\alpha} - (\sigma(z))_{R_L} = \sigma\tilde{\alpha} - (z\varphi(\sigma))_{R_L} =$$

$$= \sigma\tilde{\alpha} - (\varphi(\sigma))_{R_L} - (z)_{R_L} = \tilde{\alpha} - (z)_{R_L} = \hat{\alpha} .$$

Damit ist nach Satz 3.1.2 gezeigt, dass $\hat{\alpha} \in \mathfrak{k}_R$ ist, also $\alpha \in \mathfrak{k}_R$.

Zweiter Beweis: Sei $\alpha \in \mathcal{F}(\mathfrak{k}_{R_L}, \Gamma(L,K))$ und $\pi \in \mathfrak{k}_R$ mit $d(\pi) = 1$[8]. Man setze $\alpha' = \alpha - d(\alpha)\pi$.

Es gilt

(20) $$d(\alpha') = d(\alpha) - d(\alpha) = 0 .$$

Für jedes $\sigma \in \Gamma(L,K)$ ist

(21) $$\sigma\alpha' = \alpha' ,$$

da $\alpha \in \mathcal{F}(\mathfrak{k}_{R_L}, \Gamma(L,K))$ und $d(\alpha)\pi \in \mathfrak{k}_R$ ist, Also kann man o.B.d.A. annehmen, dass $d(\alpha) = 0$ ist.

Sei $\mathfrak{g}$ ein Primdivisor ersten Grades von R und π die Restklasse von $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{k}_R$. Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ mit $n<0$ gilt

(22) $$\mathcal{N}(\alpha + n\pi) = 0 .$$[9]

Andererseits ist nach dem Riemann-Rochschen Satz

(23) $$\mathcal{N}(\alpha + g\pi) > 0 ,$$

wobei g das Geschlecht von R ist.[10]

Damit ist gezeigt, dass die Menge

(24) $$\mathcal{M} = \{ m \mid m \in \mathbb{Z}, \mathcal{N}(\alpha + m\pi) > 0 \}$$

nicht leer und nach unten beschränkt ist.

Sei $m_o = \min(\mathcal{M})$. Nach ([4], § 15, p.47, Theorem, unten) ist

(25) $$1 \leq \mathcal{N}(\alpha + m_o\pi) = \mathcal{N}(\alpha + (m_o - 1)\pi + \pi) \leq$$

$$\leq \mathcal{N}(\alpha + (m_o - 1)\pi) + d(\pi) = 0 + 1 = 1 ,$$

---

(8) Für jedes $\gamma \in \mathfrak{k}_{R_L}$ ist $d(\gamma)$ der Grad von γ.

(9) Für jedes $\gamma \in \mathfrak{k}_{R_L}$ ist $\mathcal{N}(\gamma)$ die Dimension von γ.

(10) Da L separabel über K ist, so muss auch g das Geschlecht von R_L sein.

also $\lambda(\alpha + m_o\pi) = 1$.

Damit ist gezeigt, dass die Klasse $\alpha + m_o\pi$ genau einen ganzen Divisor $\mathfrak{A}$ enthält.

Andererseits ist für jedes $\sigma \in \Gamma(L,K)$

(26) $$\sigma(\alpha + m_o\pi) = \alpha + m_o\pi .$$

Daraus folgt $\sigma\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ für jedes $\sigma \in \Gamma(L,K)$, also $\mathfrak{A} \in \mathfrak{D}_R$ (Satz 3.1.2). Damit ist gezeigt, dass $\alpha \in \mathfrak{K}_R$ ist.

Satz 3.2.2) Sei R ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper K, der mindestens einen Primdivisor ersten Grades besitzt.

Weiter sei L eine separable algebraische Körpererweiterung von K.

Behauptung: Für jede Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathfrak{K}_{R_L}$ existiert ein kleinster Zwischenkörper $K \subset L_{\mathcal{A}} \subset L$ mit $\mathcal{A} \subset \mathfrak{K}_{R_{L_{\mathcal{A}}}}$.

Beweis: Man macht den gleichen Schluss wie bei den Divisoren, indem man Satz 3.2.1 und den Hilfssatz aus Abschnitt 3.1 benutzt.

Satz 3.2.3) Sei R ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper K vom Geschlecht g, L eine galoissche Körpererweiterung von K, für die

(27) $$g \leq m(L) + 1$$

gilt, wobei

(28) $$m(L) = \min_{\mathfrak{p}} d(\mathfrak{p})$$

($\mathfrak{p}$ durchläuft alle Primdivisoren von R_L) ist.

Weiter sei $\alpha \in \mathfrak{K}_{R_L}$ mit folgenden Eigenschaften:

I) Es existiert ein $\pi \in \mathfrak{K}_R$ mit $d(\alpha) \equiv g \pmod{d(\pi)}$;

II) $\sigma\alpha = \alpha$ für jedes $\sigma \in \Gamma(L,K)$.

Behauptung: Es gilt $\alpha \in \mathfrak{K}_R$.

Beweis: Sei $\gamma \in \mathfrak{K}_{R_L}$ mit $\gamma \neq 0$ und $d(\gamma) \leq m(L) - 1$. Es ist $\mathcal{N}(\gamma) = 0$. Angenommen, es sei $\mathcal{N}(\gamma) \geq 1$. Daraus folgt, dass γ einen ganzen Divisor $\mathfrak{A}$ enthält. Wegen $\gamma \neq 0$ ist $\mathfrak{A} \neq 0$, d.h. dass supp $(\mathfrak{A})$ nichtleer ist. Für jeden Primdivisor $\mathfrak{p} \in$ supp $(\mathfrak{A})$ gilt

(29) $\quad d(\mathfrak{p}) \leq d(\mathfrak{A}) = d(\gamma) \leq m(L) - 1$.

Das ist wegen (28) ein Widerspruch.

Sei ω die kanonische Klasse von R_L und $\pi \in \mathfrak{K}_R$ mit $d(\alpha) \equiv g \pmod{d(\pi)}$. Es ist

(30) $\quad g = d(\alpha) + m\, d(\pi) = d(\alpha + m\pi)$

für ein passendes $m \in \mathbb{Z}$. Wenn $\alpha + m\pi = \omega$ ist,[11] so muss $\alpha \in \mathfrak{K}_R$ sein. Man nehme an, dass $\alpha + m\pi \neq \omega$ ist. Aus (27) und (30) folgt

(31) $\quad d(\omega - \alpha - m\pi) = 2g - 2 - g = g - 2 \leq m(L) - 1$.

Nach den Betrachtungen am Anfang dieses Beweises ist also wegen (31) und $\alpha + m\pi \neq \omega$

(32) $\quad \mathcal{N}(\omega - \alpha - m\pi) = 0$.

Also gilt nach dem Riemann-Rochschen Satz

(33) $\quad \mathcal{N}(\alpha + m\pi) = d(\alpha + m\pi) - g + 1 = g - g + 1 = 1$.

Damit ist gezeigt, dass die Klasse $\alpha + m\pi$ genau einen ganzen Divisor $\mathfrak{A}$ enthält.

Andererseits ist wegen II) für jedes $\sigma \in \Gamma(L, K)$

(34) $\quad \sigma(\alpha + m\pi) = \alpha + m\pi$.

Daraus folgt $\sigma\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ für jedes $\sigma \in \Gamma(L, K)$, also $\mathfrak{A} \in \mathfrak{D}_R$ (Satz 3.1.2). Damit ist gezeigt, dass $\alpha \in \mathfrak{K}_R$ ist .

Satz 3.2.4) Sei R ein algebraischer Funktionenkörper mit dem

---

(11) Sei ω_R die kanonische Klasse von R. Da $d(\omega_R) = 2g-2$ und $\mathcal{N}(\omega_R) = g$ ist, so muss nach [4], p.47, oben) $\omega_R = \omega$ sein.

Konstantenkörper K vom Geschlecht $g \leq 3$, L eine galoissche Körpererweiterung von K.

Weiter sei $\alpha \in \mathfrak{k}_{R_L}$ mit folgenden Eigenschaften:

I) Es existiert ein $\pi \in \mathfrak{k}_R$ mit $d(\alpha) \equiv g \pmod{d(\pi)}$;

II) $\sigma\alpha = \alpha$ für jedes $\sigma \in \Gamma(L,K)$.

Behauptung: Es gilt $\alpha \in \mathfrak{k}_R$.

Beweis: Wenn $m(L) \geq 2$ ist (siehe (28)), so folgt die Behauptung aus Satz 3.2.3. Man nehme an, dass $m(L) = 1$ ist, d.h. R_L besitzt mindestens einen Primdivisor $\mathfrak{p}$ vom Grade 1. Mit λ bezeichne man die Klasse aus $\mathfrak{k}_{R_L}$ mit $\mathfrak{p} \in \lambda$.

Es gilt

(35) $\qquad d(\omega - \alpha - m\pi) = 2g - 2 - g = g - 2 \leq 1$.

Wenn $\alpha + m\pi = \omega$ ist, so muss $\alpha \in \mathfrak{k}_R$ sein (vgl. den Beweis von Satz 3.2.3 und Fussnote (11)).

Man nehme an, dass $\alpha + m\pi \neq \omega$ ist. Wegen (35) ist

(36) $\quad d(\omega - \alpha - m\pi - 2\lambda) = d(\omega - \alpha - m\pi) - 2 \leq 1 - 2 = -1 < 0$.

Daraus folgt $\mathcal{N}(\omega - \alpha - m\pi - 2\lambda) = 0$.

Nach ([4], § 15, p.47, Theorem, unten) ist

(37) $\qquad \mathcal{N}(\omega - \alpha - m\pi) \leq \mathcal{N}(\omega - \alpha - m\pi - 2\lambda) + d(2\lambda) = 2$.

Man mache folgende Fallunterscheidung:

a) $\mathcal{N}(\omega - \alpha - m\pi) = 0$. In diesem Fall sieht man durch den gleichen Schluss wie in dem Beweis von Satz 3.2.3, dass $\alpha \in \mathfrak{k}_R$ ist.

b) $\mathcal{N}(\omega - \alpha - m\pi) = 1$. Daraus folgt, dass die Klasse $\omega - \alpha - m\pi$ genau einen ganzen Divisor $\mathfrak{A}$ enthält. Wegen II) ist für jedes $\sigma \in \Gamma(L,K)$

(38) $\qquad \sigma(\omega - \alpha - m\pi) = \omega - \alpha - m\pi$.

Daraus folgt $\sigma\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ für jedes $\sigma \in \Gamma(L,K)$, also $\mathfrak{A} \in \mathfrak{d}_R$ (Satz 3.1.2). Damit ist in diesem Fall gezeigt, dass $\alpha \in \mathfrak{k}_R$ ist.

c) $\mathcal{N}(\omega - \alpha - m\pi) = 2$. Wegen $\omega - \alpha - m\pi \neq 0$ und $\mathcal{N}(\omega - \alpha - m\pi) \geq 1$ muss

$d(\omega-\alpha-m\pi)\geq 1$ sein. Daraus folgt nach (35) $d(\omega-\alpha-m\pi)=1$. Also man erhält in diesem Fall

(39) $\qquad \mathcal{N}(\omega-\alpha-m\pi) = d(\omega-\alpha-m\pi)+1.$

Da $\omega-\alpha-m\pi$ einen ganzen Divisor $\mathfrak{A}+0$ enthält, so folgt nach ([3],chap.IV, § 9, Corollary of Lemma 1,p.75, oben) aus (39), dass $g=0$ ist.

Damit ist nach Satz 3.2.3 auch dieser Fall erledigt.

Satz 3.2.5) Sei R ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper K vom Geschlecht g, L eine galoissche Körpererweiterung von K, für die

(40) $\qquad g \leq \max(2, m(L)) + 1$

gilt (über die Definition von m(L) siehe (28)).

Weiter sei $\alpha \in \mathfrak{k}_{R_L}$ mit folgenden Eigenschaften:

I) Es existiert ein $\pi \in \mathfrak{k}_R$ mit $d(\alpha) \equiv g \pmod{d(\pi)}$;

II) $\sigma\alpha = \alpha$ für jedes $\sigma \in \Gamma(L,K)$.

Behauptung: Es gilt $\alpha \in \mathfrak{k}_R$.

Beweis: Die Behauptung folgt aus Satz 3.2.3 und Satz 3.2.4.

Satz 3.2.6) Sei R ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper K vom Geschlecht g, so dass mindestens ein Divisor $\mathfrak{a} \in \mathfrak{d}_R$ mit $d(\mathfrak{a})=1$ existiert.

Weiter sei L eine galoissche Körpererweiterung von K, für die (40) gilt.

Behauptung: Es ist $\mathfrak{k}_R = \mathfrak{F}(\mathfrak{k}_{R_L}, \Gamma(L,K))$.

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 3.2.5.

Satz 3.2.7) Sei R ein algebraischer Funktionenkörper mit dem endlichen Konstantenkörper K vom Geschlecht g.

Weiter sei L eine algebraische Körpererweiterung von K, für die (40) gilt.

Behauptung: Es ist $\mathfrak{K}_R = \mathfrak{F}(\mathfrak{K}_{R_L}, \Gamma(L,K))$.

Beweis: Nach ([4],§ 39, Theorem, p.164, oben) existiert mindestens ein Divisor $\mathfrak{a} \in \mathfrak{D}_R$ mit $d(\mathfrak{a}) = 1$. Daraus folgt nach Satz 3.2.6 die Behauptung.

Satz 3.2.8) Sei R ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper K vom Geschlecht g, L eine separable algebraische Körpererweiterung von K, für die (40) gilt.

Weiter sei $\alpha \in \mathfrak{K}_{R_L}$ mit folgender Eigenschaft:

Es existiert ein $\pi \in \mathfrak{K}_R$ mit $d(\alpha) \equiv g \pmod{d(\pi)}$.

Behauptung: Es existiert ein kleinster Zwischenkörper $K \subset L_\alpha \subset L$ mit $\alpha \in \mathfrak{K}_{R_{L_\alpha}}$.

Beweis: Man macht den gleichen Schluss wie bei den Divisoren, indem man Satz 3.2.5, den Hilfssatz aus Abschnitt 3.1 und ([3], chap. V, § 6, Theorem 5, p.99) benutzt.

Satz 3.2.9) Sei R ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper K, der mindestens einen Primdivisor $\mathfrak{p}$ mit folgenden Eigenschaften besitzt:

I) Der Restklassenkörper $R(\mathfrak{p})$ von $\mathfrak{p}$ ist galoissch über K;[12]

II) $\mathfrak{K}_R = \mathfrak{F}(\mathfrak{K}_{R_{R(\mathfrak{p})}}, \Gamma(R(\mathfrak{p}), K))$.

Weiter sei L eine galoissche Körpererweiterung von K.

Behauptung: Es gilt $\mathfrak{K}_R = \mathfrak{F}(\mathfrak{K}_{R_L}, \Gamma(L,K))$.

Beweis: Sei $\mathfrak{p}$ ein Primdivisor von R mit den Eigenschaften I), II). Wegen I) besitzt der Funktionenkörper $R_{R(\mathfrak{p})}$ mindestens einen Primdivisor ersten Grades ([4], § 37, Theorem, p.142).

---

(12) $R(\mathfrak{p}) = \mathfrak{o}_\mathfrak{p} / \mathfrak{m}_\mathfrak{p}$.

Sei Ω ein gemeinsamer Oberkörper von L und $R(\mathfrak{g})$. Da L galoissch über K ist, so muss das Körperkompositum $LR(\mathfrak{g})$ galoissch über $R(\mathfrak{g})$ sein. Also ist nach Satz 3.2.1

$$(41) \qquad \mathfrak{k}_{R_{R(\mathfrak{g})}} = \mathfrak{F}(\mathfrak{k}_{R_{LR(\mathfrak{g})}}, \Gamma(LR(\mathfrak{g}), R(\mathfrak{g}))).$$

Sei $\alpha \in \mathfrak{F}(\mathfrak{k}_{R_L}, \Gamma(L,K))$. Für jeden Automorphismus $\sigma \in \Gamma(LR(\mathfrak{g}), K)$ ist $\sigma\alpha = \alpha$. Daraus folgt wegen (41) $\alpha \in \mathfrak{k}_{R_{R(\mathfrak{g})}}$. Da $LR(\mathfrak{g})$ galoissch über K ist, so lässt sich jeder Automorphismus $\sigma \in \Gamma(R(\mathfrak{g}), K)$ fortsetzen zu einem Automorphismus aus $\Gamma(LR(\mathfrak{g}), K)$. Daraus folgt nach den obigen Betrachtungen, dass $\sigma\alpha = \alpha$ für jedes $\sigma \in \Gamma(R(\mathfrak{g}), K)$ gilt. Also ist wegen II) $\alpha \in \mathfrak{k}_R$.

Satz 3.2.10) Sei R ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper K, der den folgenden Bedingungen genügt:

I) Ist M eine endliche separable algebraische Körpererweiterung von K, so existiert zu jeder Klasse $\alpha \in \mathfrak{k}_{R_M}$ mit $d(\alpha)=0$ ein kleinster Zwischenkörper $K \subset M_\alpha \subset M$ mit $\alpha \in \mathfrak{k}_{R_{M_\alpha}}$;[13]

II) R besitzt mindestens einen Divisor $\mathfrak{a}$ mit folgenden Eigenschaften:

a) Für jeden Primdivisor $\mathfrak{g} \in \mathrm{Supp}(\mathfrak{a})$ ist der Restklassenkörper $R(\mathfrak{g})$ von $\mathfrak{g}$ galoissch über K;

b) $d(\mathfrak{a}) = 1$.

Weiter sei L eine galoissche Körpererweiterung von K.

Behauptung: Es gilt $\mathfrak{k}_R = \mathfrak{F}(\mathfrak{k}_{R_L}, \Gamma(L,K))$.

Beweis: Sei $\alpha \in \mathfrak{k}_R$ mit den Eigenschaften a), b). Wegen a) besitzt für jedes $\mathfrak{g} \in \mathrm{Supp}(\mathfrak{a})$ der Funktionenkörper $R_{R(\mathfrak{g})}$ mindestens einen Primdivisor ersten Grades ([4], § 37, Theorem, p.142).

---

13) Die Bedingung I) ist äquivalent mit folgender:
I') Ist M eine separable algebraische Körpererweiterung von K, so existiert zu jedem $\alpha \in \mathfrak{k}_{R_M}$ mit $d(\alpha)=0$ ein kleinster Zwischenkörper $K \subset M_\alpha \subset M$ mit $\alpha \in \mathfrak{k}_{R_{M_\alpha}}$ (siehe den Beweis von Satz 3.1.4).

Nun sei $\alpha \in \mathfrak{F}(\mathfrak{k}_{R_L}, \Gamma(L,K))$ und Ω eine Körpererweiterung von K, welche L und alle $R(\mathfrak{g})$ ($\mathfrak{g} \in \mathrm{Supp}(\mathfrak{a})$) enthält. Da R mindestens einen Divisor ersten Grades besitzt, so kann man o.B.d.A. annehmen, dass $d(\alpha)=0$ ist.

Wegen $d(\mathfrak{a})=1$ sind alle Körpergrade $d(\mathfrak{g}) = [R(\mathfrak{g}):K]$ ($\mathfrak{g} \in \mathrm{Supp}(\mathfrak{a})$) teilerfremd. Daraus folgt

$$K = \bigcap_{\mathfrak{g} \in \mathrm{Supp}(\mathfrak{a})} R(\mathfrak{g}) , \tag{42}$$

da $[\bigcap_{\mathfrak{g} \in \mathrm{Supp}(\mathfrak{a})} R(\mathfrak{g}):K]$ ein gemeinsamer Teiler von den $d(\mathfrak{g})$ ($\mathfrak{g} \in \mathrm{Supp}(\mathfrak{a})$) ist.

Sei $\mathfrak{g} \in \mathrm{Supp}(\mathfrak{a})$. Da $\alpha \in \mathfrak{F}(\mathfrak{k}_{R_L}, \Gamma(L,K))$ ist, so gilt für jedes $\sigma \in \Gamma(LR(\mathfrak{g}),K)$ $\sigma\alpha = \alpha$. Daraus folgt nach Satz 3.2.1 $\alpha \in \mathfrak{k}_{R_{R(\mathfrak{g})}}$.

Mit M bezeichne man den von der Vereinigungsmenge $\bigcup_{\mathfrak{g} \in \mathrm{Supp}(\mathfrak{a})} R(\mathfrak{g})$ erzeugten Unterkörper von Ω. Wendet man die Bedingung I') (Fussnote (13)) auf M und α an, so folgt nach den letzten Betrachtungen $M_\alpha \subset \bigcap_{\mathfrak{g} \in \mathrm{Supp}(\mathfrak{a})} R(\mathfrak{g})$. Damit ist nach (42) $M_\alpha = K$.

Bemerkung) Lässt man eine der beiden Bedingungen I) oder II) fallen, so ist die Behauptung von Satz 3.2.10 im allgemeinen falsch, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt:

Sei R ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper K, der den folgenden Bedingungen genügt:

1) Das Geschlecht von R ist 0;
2) R besitzt mindestens einen Primdivisor $\mathfrak{g}$, dessen Restklassenkörper $R(\mathfrak{g})$ galoissch über K ist;
3) Für jeden Primdivisor $\mathfrak{g}$ von R ist $d(\mathfrak{g}) \geq 2$.

Ein Beispiel für einen algebraischen Funktionenkörper R mit den

Eigenschaften 1), 2), 3) findet man z.B. in ([3], chap.II, § 2, p.23, unten).[14]

Für jeden Divisor $\mathfrak{a} \in \mathfrak{d}_R$ gilt $d(\mathfrak{a}) \neq 1$. Angenommen, es gäbe ein $\mathfrak{a}_o \in \mathfrak{d}_R$ mit $d(\mathfrak{a}_o) = 1$. Da das Geschlecht von R gleich 0 ist, so existiert nach dem Satz von Riemann ein $x \in R^\times$, für welches $\mathfrak{g} = (x)_R + \mathfrak{a}_o$ ganz ist. Weil $\mathfrak{g}$ ganz und $d(\mathfrak{g}) = 1$ ist, so muss $\mathfrak{g}$ ein Primdivisor sein. Das ist ein Widerspruch zu 3).

---

(14) Das Beispiel in ([3], chap.II, §2, p.23, unten) lässt sich folgendermassen verallgemeinern:
Sei K ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ ist der Körper der reellen Zahlen) und $R = K(x,y)$, wobei x transzendent über K und $x^2+y^2+1=0$ ist. Nach dem Eisensteinischen Irreduzibilitätskriterium ist das Polynom Y^2+x^2+1 irreduzibel in $K(x)[Y]$. Daraus folgt $[K(x,y) : K(x)] = 2$.
K ist der Konstantenkörper von R. In der Tat, man nehme an, dass ein $\lambda_o \in R-K$ existiert, welches über K algebraisch ist. Da K in $K(x)$ algebraisch abgeschlossen ist, so muss $\lambda_o \notin K(x)$ sein. Also hat man $R = K(\lambda_o,x)$. Nach ([3], chap.I, § 3, p.3) existiert ein Primdivisor $\mathfrak{g}$ von dem Funktionenkörper $R = [K(\lambda_o)](x)$ (über $K(\lambda_o)$) mit $v_{\mathfrak{g}}(x^2+1) = 1$. Das ist wegen $2\, v_{\mathfrak{g}}(y) = 1$ ein Widerspruch.
Nach ([4], § 17, p.55, Mitte) ist das Geschlecht von R gleich 0. Für jeden Primdivisor $\mathfrak{g}$ von R gilt $d(\mathfrak{g}) \geq 2$. Angenommen, es gäbe einen Primdivisor $\mathfrak{g}$ mit $d(\mathfrak{g}) = 1$. Daraus folgt $R = K(u)$, wobei u transzendent über K ist, da das Geschlecht von R gleich 0 ist. Sei $x = \frac{p(u)}{q(u)}$ und $y = \frac{s(u)}{t(u)}$, wobei $p(u),q(u),s(u),t(u)$ Polynome aus $K[u]$ sind und $q(u) \neq 0$, $t(u) \neq 0$ Man erhält

$$p^2(u)\,t^2(u) + s^2(u)\,q^2(u) = -\,q^2(u)t^2(u) .$$

Der höchste Koeffizient der linken Seite (bzw. rechten Seite) ist positiv (bzw. negativ). Das ist ein Widerspruch.
Da R über $K(x)$ galoissch ist, so existiert ein Primdivisor $\mathfrak{g}$ von R, dessen Restklassenkörper $R(\mathfrak{g})$ galoissch über K ist.

Sei $\mathfrak{p}$ ein Primdivisor von R, dessen Restklassenkörper $R(\mathfrak{p})$ galoissch über K ist (siehe 3)). Nach ([4],§ 37, Theorem, p.142) besitzt der Funktionenkörper $R_{R(\mathfrak{p})}$ mindestens einen Primdivisor ersten Grades. Wegen 1) ist das Geschlecht von $R_{R(\mathfrak{p})}$ gleich 0. Sei $\alpha \in \mathfrak{K}_{R_{R(\mathfrak{p})}}$ und $\sigma \in \Gamma(R(\mathfrak{p}), K)$. Es gilt $d(\alpha - \sigma\alpha) = 0$. Daraus folgt $\alpha - \sigma\alpha = 0$, da das Geschlecht von $R_{R(\mathfrak{p})}$ gleich 0 ist. Damit ist $\mathfrak{K}_{R_{R(\mathfrak{p})}} = \mathfrak{F}(\mathfrak{K}_{R_{R(\mathfrak{p})}}, \Gamma(R(\mathfrak{p}), K))$ bewiesen. Andererseits gilt nach den obigen Betrachtungen für jedes $\alpha \in \mathfrak{K}_R$ $d(\alpha) \neq 1$. Also ist $\mathfrak{K}_R \neq \mathfrak{F}(\mathfrak{K}_{R_{R(\mathfrak{p})}}, \Gamma(R(\mathfrak{p}), K))$, da mindestens ein $\alpha \in \mathfrak{K}_{R_{R(\mathfrak{p})}}$ mit $d(\alpha) = 1$ existiert.

Satz 3.2.11) Sei R ein algebraischer Funktionenkörper mit dem endlichen Konstantenkörper K, der folgende Eigenschaft besitzt: Ist M eine endliche algebraische Körpererweiterung von K, so existiert zu jeder Klasse $\alpha \in \mathfrak{K}_{R_M}$ mit $d(\alpha) = 0$ ein kleinster Zwischenkörper $K \subset M_\alpha \subset M$ mit $\alpha \in \mathfrak{K}_{R_{M_\alpha}}$.
Weiter sei L eine algebraische Körpererweiterung von K.
Behauptung: Es gilt $\mathfrak{K}_R = \mathfrak{F}(\mathfrak{K}_{R_L}, \Gamma(L,K))$.
Beweis: Nach ([4],§ 39, Theorem, p.164, oben) existiert mindestens ein Divisor $\mathfrak{a} \in \mathfrak{D}_R$ mit $d(\mathfrak{a}) = 1$. Daraus folgt nach Satz 3.2.10 die Behauptung.

Satz 3.2.12) Dieselben Voraussetzungen, wie in Satz 3.2.10.
Behauptung: Für jeden Zwischenkörper $K \subset N \subset L$ gilt
$\mathfrak{K}_{R_N} = \mathfrak{F}(\mathfrak{K}_{R_L}, \Gamma(L,N))$.
Beweis: Sei N ein Unterkörper von L mit $K \subset N$ und $\mathfrak{a} \in \mathfrak{D}_R$ mit den Eigenschaften a), b) (siehe Satz 3.2.10). Wegen b) ist der Grad von $\mathfrak{a}$ in R_N gleich 1, da N separabel über K ist.
Sei $\mathfrak{p}$ ein Primdivisor von R_N mit $v_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}) \neq 0$. $\mathfrak{p}$ liegt über einem Primdivisor $\mathfrak{p}$ von R. Wegen a) und $v_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}) = v_\mathfrak{p}(\mathfrak{a})$ ist $R(\mathfrak{p})$

galoisch über K. Nach ([4], § 37, Theorem, p.142) gilt $R_N(\mathfrak{p}) = NR(\mathfrak{g})$. Daraus folgt, dass $R_N(\mathfrak{p})$ galoissch über N ist, da $R(\mathfrak{g})$ galoissch über K ist.

Nun sei M eine separable algebraische Körpererweiterung von N und $\alpha \in \mathfrak{K}_{R_M}$ mit $d(\alpha) = 0$. Wegen I') (siehe Fussnote (13)) gilt für jeden Zwischenkörper $N \subset M' \subset M$ mit $\alpha \in \mathfrak{K}_{R_{M'}}$, stets $N M_\alpha \subset M'$. Damit ist nach Satz 3.2.10 die Behauptung vollständig bewiesen.

Satz 3.2.13) Sei R ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper K, der folgende Bedingung erfüllt:

a) Ist M eine separable algebraische Körpererweiterung von K, so existiert zu jeder Klasse $\alpha \in \mathfrak{K}_{R_M}$ ein kleinster Zwischenkörper $K \subset M_\alpha \subset M$ mit $\alpha \in \mathfrak{K}_{R_{M_\alpha}}$.

Weiter sei L eine galoissche Körpererweiterung von K, für die ein Primdivisor $\mathfrak{g}$ von R mit folgenden Eigenschaften existiert:

I) Der Restklassenkörper $R(\mathfrak{g})$ ist galoissch über K;

II) Das Tensorprodukt $L \underset{K}{\otimes} R(\mathfrak{g})$ ist ein Körper.[15]

Behauptung: Für jeden Zwischenkörper $K \subset N \subset L$ gilt $\mathfrak{K}_{R_N} = \mathfrak{F}(\mathfrak{K}_{R_L}, \Gamma(L,N))$.

Beweis: Wegen II) sind L, $R(\mathfrak{g})$ (in $L \underset{K}{\otimes} R(\mathfrak{g})$) linear-disjunkt über K. Daraus folgt nach dem Verlagerungssatz über Linear-disjunkte Körpererweiterungen ([2], chap.V, §2, Nr. 3, Proposition 7, p.80), dass für jeden Zwischenkörper $K \subset N \subset L$ L, $NR(\mathfrak{g})$ linear-disjunkt über N sind. Also ist $N = L \cap NR(\mathfrak{g})$.

---

(15) Allgemein gilt folgender Satz:
Seien M_1 und M_2 algebraische Körpererweiterungen von K.
Behauptung: Folgende Aussagen sind äquivalent:
1) Das Tensorprodukt $M_1 \underset{K}{\otimes} M_2$ ist ein Körper;
2) Es existiert ein gemeinsamer Oberkörper Ω von M_1 und M_2, in welchem M_1, M_2 linear-disjunkt über K sind.

Nun sei $\alpha \in \mathfrak{F}(\mathfrak{k}_{R_L}, \Gamma(L,N))$. Da L galoissch über K ist, so muss $L \underset{K}{\otimes} R(\mathfrak{g}) = LNR(\mathfrak{g})$ galoissch über $NR(\mathfrak{g})$ sein. Nach ([4], § 37, Theorem, p.142) besitzt der Funktionenkörper $R_{NR(\mathfrak{g})}$ mindestens einen Primdivisor ersten Grades. Daraus folgt nach Satz 3.2.1 $\alpha \in \mathfrak{k}_{R_{NR(\mathfrak{g})}}$. Wendet man die Bedingung a) auf $M = L \underset{K}{\otimes} R(\mathfrak{g})$ und α an, so folgt nach den letzten Betrachtungen $\alpha \in \mathfrak{k}_{R_N}$.

Satz 3.2.14) Dieselben Voraussetzungen wie in Satz 3.2.9.
Behauptung: Für jede Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathfrak{k}_{R_L}$ mit $\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$ gilt $\mathfrak{k}_R \subset \mathcal{A}$.[16]
Beweis: Nach Satz 3.2.9 ist

(43) $\mathfrak{k}_R = \mathfrak{F}(\mathfrak{k}_{R_L}, \Gamma(L,K)) \subset \mathfrak{F}(\mathfrak{k}_{R_L}, \Gamma(\mathfrak{k}_{R_L}, \mathcal{A})) = \hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$.

Satz 3.2.15) Sei R ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper K, der die Bedingungen I), II) aus Satz 3.2.10 erfüllt.
Weiter sei L eine endliche galoissche Körpererweiterung von K und $\mathcal{A}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{k}_{R_L}$ mit $\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$.
Mit L' bezeichne man den Fixkörper von $\Gamma(\mathfrak{k}_{R_L}, \mathcal{A})$ in L.
Behauptung: Es ist $\mathcal{A} = \mathfrak{k}_{R_{L'}}$.
Beweis: Nach dem Hauptsatz der Galoistheorie gilt $\Gamma(L,L') = \Gamma(\mathfrak{k}_{R_L}, \mathcal{A})$. Daraus folgt nach Satz 3.2.12, dass

---

(Fortsetzung von Fussnote(15)) Wenn ausserdem M_1 galoissch über K ist, so sind nach ([2], chap.V, § 10, Nr.4, Théorème 1, p.149) die Aussagen 1 und 2 äquivalent mit folgender Aussage:
3) Es existiert ein gemeinsamer Oberkörper Ω von M_1 und M_2, in welchem $M_1 \cap M_2 = K$ ist.

(16) Für jede Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathfrak{k}_{R_L}$ ist per Definition $\Gamma(\mathfrak{k}_{R_L}, \mathcal{A}) = \{\sigma \mid \sigma \in \Gamma(L,K), \sigma\alpha = \alpha \text{ für jedes } \alpha \in \mathcal{A}\}$ und $\hat{\mathcal{A}} = \mathfrak{F}(\mathfrak{k}_{R_L}, \Gamma(\mathfrak{k}_{R_L}, \mathcal{A}))$ (siehe 1.1).

(44) $\mathfrak{k}_{R_{L'}} = \mathfrak{F}(\mathfrak{k}_{R_L}, \Gamma(L,L'))$

$= \mathfrak{F}(\mathfrak{k}_{R_L}, \Gamma(\mathfrak{k}_{R_L}, \mathcal{A})) = \hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$

ist.

Satz 3.2.16) Sei R ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper K, der die Bedingungen I), II) aus Satz 3.2.10 erfüllt.

Weiter sei L eine endliche galoissche Körpererweiterung von K, und $\mathcal{A}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{k}_{R_L}$.

Behauptung: Folgende Aussagen sind äquivalent:

1) $\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$;

2) Es existiert ein Zwischenkörper $K \subset L' \subset L$ mit $\mathfrak{k}_{R_{L'}} = \mathcal{A}$.

Beweis von 1) $\Longrightarrow$ 2) : Sei $\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$. Nimmt man für L'den Fixkörper von $\Gamma(\mathfrak{k}_{R_L}, \mathcal{A})$ in L, so erhält man nach Satz 3.2.15 $\mathcal{A} = \mathfrak{k}_{R_{L'}}$.

Beweis von 2) $\Longrightarrow$ 1) : Sei $\mathcal{A} = \mathfrak{k}_{R_{L'}}$ für einen geeigneten Zwischenkörper $K \subset L' \subset L$. Einerseits ist $\Gamma(L,L') \subset \Gamma(\mathfrak{k}_{R_L}, \mathcal{A})$. Sei $\alpha \in \hat{\mathcal{A}}$. Da $\Gamma(L,L') \subset \Gamma(\mathfrak{k}_{R_L}, \mathcal{A})$ ist, so muss für jedes $\sigma \in \Gamma(L,L')$ $\sigma\alpha = \alpha$ sein. Daraus folgt nach Satz 3.2.12, dass $\alpha \in \mathcal{A} = \mathfrak{k}_{R_{L'}}$ ist. Damit ist die Behauptung vollständig bewiesen.

Satz 3.2.17) Dieselben Voraussetzungen wie in Satz 3.2.16.

Behauptung: Folgende Aussagen sind äquivalent:

1) $\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$ und $\Gamma(\mathfrak{k}_{R_L}, \mathcal{A})$ ist ein Normalteiler in $\Gamma(L,K)$;

2) Es existiert ein Zwischenkörper $K \subset L' \subset L$ mit $\mathfrak{k}_{R_{L'}} = \mathcal{A}$, welcher über K normal ist.

Beweis von 1) $\Rightarrow$ 2): Sei $\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$ und $\Gamma(\mathfrak{k}_{R_L}, \mathcal{A})$ ein Normalteiler in $\Gamma(L,K)$. Mit L' bezeichne man den Fixkörper von $\Gamma(\mathfrak{k}_{R_L}, \mathcal{A})$ in L. Da $\Gamma(\mathfrak{k}_{R_L}, \mathcal{A})$ ein Normalteiler in $\Gamma(L,K)$

ist, so muss L'normal über K sein.

Andererseits ist wegen $\mathcal{A} = \hat{\mathcal{A}}$ nach Satz 3.2.15 $\mathcal{A} = \mathfrak{R}_{R_{L'}}$.

Beweis von 2) $\Rightarrow$1): Sei $\mathcal{A} = \mathfrak{R}_{R_{L'}}$, für einen geeigneten Zwischenkörper $K \subset L' \subset L$ welcher über K normal ist. Nach Satz 3.2.16 ist $\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$.

Andererseits, da L'normal über K ist, so muss für jedes $\sigma \in \Gamma(L,K)$ $\sigma\mathcal{A} = \mathcal{A}$ sein. Da $\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$ ist, so folgt daraus nach Satz 1.1.3, dass $\Gamma(\mathfrak{R}_{R_L}, \mathcal{A})$ ein Normalteiler in $\Gamma(L,K)$ ist. Damit ist die Behauptung vollständig bewiesen.

Satz 3.2.18) Sei R ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper K, der die Bedingungen I), II) aus Satz 3.2.10 erfüllt.

Weiter sei L eine endliche galoissche Körpererweiterung von K. Mit L' bezeichne man den Fixkörper von $\Gamma(\mathfrak{R}_{R_L}, \mathfrak{R}_{R_L})$ in L.(17)

Behauptung: L' ist der kleinste Zwischenkörper $K \subset M \subset L$ mit $\mathfrak{R}_{R_L} = \mathfrak{R}_{R_M}$.

Beweis: Nach Satz 3.2.15 ist $\mathfrak{R}_{R_{L'}} = \mathfrak{R}_{R_L}$, da $\widehat{\mathfrak{R}_{R_L}} = \mathfrak{R}_{R_L}$ ist. Sei M ein Unterkörper von L mit $K \subset M$ und $\mathfrak{R}_{R_M} = \mathfrak{R}_{R_L}$. Aus $\mathfrak{R}_{R_M} = \mathfrak{R}_{R_L}$ folgt $\Gamma(L,M) \subset \Gamma(\mathfrak{R}_{R_L}, \mathfrak{R}_{R_L}) = \Gamma(L,L')$, also $M \supset L'$.

Damit ist die Behauptung vollständig bewiesen.

3.3. Eigenschaften des $\Gamma(L,K)$-Moduls $\mathfrak{R}_{R_L} / \mathfrak{R}_R$.

Sei R ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper K.

Weiter sei L eine galoissche Körpererweiterung von K.

---

(17) Da $\widehat{\mathfrak{R}_{R_L}} = \mathfrak{R}_{R_L}$ und $\sigma\mathfrak{R}_{R_L} = \mathfrak{R}_{R_L}$ für jedes $\sigma \in \Gamma(L,K)$ ist, so muss nach Satz 1.1.3 L'galoissch über K sein.

Trivialerweise ist für jedes Paar $(\sigma, a) \in \Gamma(L,K) \times \mathfrak{A}_R$ $\sigma a = a$. Daher ist $\mathcal{A}_{R,L} = \mathfrak{A}_{R_L} / \mathfrak{A}_R$ ein $\Gamma(L,K)$ -Modul.
Zu jedem $\sigma \in \Gamma(L,K)$ definiere man die Abbildung $\bar{\sigma} : \mathcal{A}_{R,L} \longrightarrow \mathcal{A}_{R,L}$ durch $\bar{\sigma}(\alpha) = \sigma\alpha$ für jedes $\alpha \in \mathcal{A}_{R,L}$. $\bar{\sigma}$ ist ein Automorphismus des $\mathbb{Z}$ -Moduls $\mathcal{A}_{R,L}$. Man setze

(45) $$\mathfrak{X}_{R,L} = \{ \sigma \mid \sigma \in \Gamma(L,K), \bar{\sigma} = Id_{\mathcal{A}_{R,L}} \}.$$

Es ist also $\mathfrak{X}_{R,L} = \Gamma(L,K)$ dann und nur dann, wenn $\mathcal{A}_{R,L} = \mathcal{F}(\mathcal{A}_{R,L}, \Gamma(L,K))$ ist.

Satz 3.3.1) Dieselben Voraussetzungen, wie in Satz 3.2.9.
Behauptung: Es ist

(46) $$\mathfrak{X}_{R,L} = \{ \sigma \mid \sigma \in \Gamma(L,K), (\tau\circ\sigma)a - \tau a = \sigma a - a \text{ für jedes Paar } (a,\tau) \in \mathfrak{A}_{R_L} \times (L,K) \}.$$

Beweis: Sei $\sigma \in \Gamma(L,K)$. Einerseits ist $\sigma \in \mathfrak{X}_{R,L}$ gleichbedeutend mit $\sigma a - a \in \mathfrak{A}_R$ für jedes $a \in \mathfrak{A}_{R_L}$.
Andererseits ist nach Satz 3.2.9 $\sigma a - a \in \mathfrak{A}_R$ äquivalent mit $(\tau\circ\sigma)a - \tau a = \tau(\sigma a - a) = \sigma a - a$ für jedes $\tau \in \Gamma(L,K)$.
Damit ist die Behauptung vollständig bewiesen.

Nun sei L eine endliche galoissche Körpererweiterung von K.
Mit $E_{R,L}$ bezeichne man den Fixkörper von $\mathfrak{X}_{R,L}$ in L.
Einerseits ist nach dem Hauptsatz der Galoistheorie $\mathfrak{X}_{R,L} = \Gamma(L, E_{R,L})$. Da $\mathfrak{X}_{R,L}$ ein Normalteiler in $\Gamma(L,K)$ ist (als Kern des Homomorphismus $\sigma \longrightarrow \bar{\sigma}$), so muss $E_{R,L}$ eine galoissche Körpererweiterung von K sein.
Die Folge $E_{R,L}^{(o)}$, $E_{R,L}^{(1)}$, ... von Unterkörpern des Körpers L sei folgendermassen definiert:

1) $E_{R,L}^{(o)} = L$;

2) $E_{R,L}^{(n+1)} = E_{R,E_{R,L}^{(n)}}$ für jedes $n \in \{0,1,2,\dots\}$.

Für jedes $n \in \{0,1,2,\dots\}$ gilt $E_{R,L}^{(n)} \supset E_{R,L}^{(n+1)}$ und $E_{R,L}^{(n)} \supset K$.

Nach den vorhergehenden Betrachtungen ist für jedes $n \in \{0,1,2,\dots\}$ $E_{R,L}^{(n)}$ eine galoissche Körpererweiterung von K. Da der Körpergrad $[L : K]$ endlich ist, so existiert eine nichtnegative ganze Zahl m, so dass für jedes ganze $n \geq m$ $E_{R,L}^{(n)} = E_{R,L}^{(m)}$ ist. Sei m_o das kleinste m mit dieser Eigenschaft.

Satz 3.3.2) Sei R ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper K und L eine endliche galoissche Körpererweiterung von K.

Behauptung: $E_{R,L}^{(m_o)}$ ist der grösste Zwischenkörper $K \subset M \subset L$ mit folgenden Eigenschaften:

a) M galoissch über K ;

b) $\mathfrak{K}_{R,M} = \{1\}$.

Beweis: In der Tat besitzt $E_{R,L}^{(m_o)}$ die Eigenschaften a), b). Gegeben sei ein weiterer Zwischenkörper $K \subset M \subset L$ mit den Eigenschaften a), b). Aus b) folgt

$$\mathfrak{K}_{R,L} = \Gamma(L, E_{R,L}) \subset \Gamma(L, M), \tag{47}$$

also $M \subset E_{R,L}$. Daraus folgt durch Induktion nach n, dass für jedes $n \in \{0,1,2,\dots\}$ $M \subset E_{R,L}^{(n)}$ ist (q.e.d.).

Sei L eine endliche galoissche Körpererweiterung von K und M ein Unterkörper von L mit $E_{R,L} \subset M$.

Aus $E_{R,L} \subset M$ folgt $\Gamma(L, M) \subset \Gamma(L, E_{R,L}) = \mathfrak{K}_{R,L}$. Daraus folgt

$$\mathcal{A}_{R_M,L} = \mathfrak{F}(\mathcal{A}_{R_M,L}, \Gamma(L,M)).^{(18)} \tag{48}$$

---

(18) $\mathcal{A}_{R_M,L} = \mathfrak{K}_{R_L} / \mathfrak{K}_{R_M}$.

Satz 3.3.3) Sei R ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper K, der mindestens einen Primdivisor $\mathfrak{p}$ mit den Eigenschaften I), II) aus Satz 3.2.9 besitzt.
Weiter sei L eine galoissche Körpererweiterung von K, so dass die Galoisgruppe $\Gamma(L,K)$ endlich-erzeugbar ist.
Behauptung: Wenn die Klassengruppe $\mathfrak{K}_R$ endlich-erzeugbar ist, so muss auch die abelsche Gruppe $\mathfrak{F}(\mathcal{A}_{R,L}, \Gamma(L,K))$ endlich-erzeugbar sein.
Beweis: Die Behauptung folgt aus Satz 3.2.9 und Satz 1.2.1.

Satz 3.3.4) Sei R ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper K, der mindestens einen Primdivisor $\mathfrak{p}$ mit den Eigenschaften I), II) aus Satz 3.2,9 besitzt.
Weiter sei L eine endliche galoissche Körpererweiterung von K.
Behauptung: Wenn die Klassengruppe $\mathfrak{K}_R$ endlich-erzeugbar ist, so muss die abelsche Gruppe $\mathfrak{F}(\mathcal{A}_{R,L}, \Gamma(L,K))$ endlich sein.
Beweis: Die Behauptung folgt aus Satz 3.2.9 und Satz 1.2.3.

Satz 3.3.5) Sei R ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper K, der die Bedingungen I), II) aus Satz 3.2.10 und folgende Zusatzbedingung erfüllt:
III) Die Klassengruppe $\mathfrak{K}_R$ ist endlich-erzeugbar.
Weiter sei L eine endliche galoissche Körpererweiterung von K.
Behauptung: Folgende Aussagen sind äquivalent:

a) Die abelsche Gruppe $\mathfrak{K}_{R_L} / \mathfrak{K}_R$ ist endlich-erzeugbar (bzw. endlich);
b) Die abelsche Gruppe $\mathfrak{K}_{R_{E_{R,L}}} / \mathfrak{K}_R$ ist endlich-erzeugbar (bzw. endlich);

Beweis von a) $\Rightarrow$b): Die abelsche Gruppe $\mathfrak{A}_{R_L} / \mathfrak{A}_R$ sei endlich-erzeugbar (bzw. endlich). $\mathfrak{A}_{R_{E_{R,L}}} / \mathfrak{A}_R$ als Untergruppe der endlich-erzeugbaren (bzw. endlichen) abelschen Gruppe $\mathfrak{A}_{R_L} / \mathfrak{A}_R$ muss also auch endlich-erzeugbar (bzw. endlich) sein.

Beweis von b) $\Rightarrow$a): Die abelsche Gruppe $\mathfrak{A}_{R_{E_{R,L}}} / \mathfrak{A}_R$ sei endlich-erzeugbar (bzw. endlich). Da $\mathfrak{A}_R$ und $\mathfrak{A}_{R_{E_{R,L}}} / \mathfrak{A}_R$ endlich-erzeugbar sind, so muss auch $\mathfrak{A}_{R_{E_{R,L}}}$ endlich-erzeugbar sein. Andererseits ist wegen (48) (indem man speziell $M = E_{R,L}$ nimmt)

(49) $$\mathcal{A}_{R_{E_{R,L}},L} = \mathfrak{F}(\mathcal{A}_{R_{E_{R,L}},L}, \Gamma(L, E_{R,L})) .$$

Da $\mathfrak{A}_{R_{E_{R,L}}}$ endlich-erzeugbar ist, so folgt nach Satz 3.3.4, Satz 3.2.12 und ([4],§ 37, Theorem, p.142) aus (49), dass die abelsche Gruppe $\mathcal{A}_{R_{E_{R,L}},L} = \mathfrak{A}_{R_L} / \mathfrak{A}_{R_{E_{R,L}}}$ endlich ist. Damit ist die Behauptung vollständig bewiesen.

Folgerung) Dieselben Voraussetzungen wie in Satz 3.3.5. Weiter sei M der grösste Unterkörper von L mit folgenden Eigenschaften:

a) M ist eine galoissche Körpererweiterung von K ;

b) $\mathfrak{X}_{R,M} = \{1\}$.

Behauptung: Folgende Aussagen sind äquivalent:

I) Die abelsche Gruppe $\mathfrak{A}_{R_L} / \mathfrak{A}_R$ ist endlich-erzeugbar (bzw. endlich);

II) Die abelsche Gruppe $\mathfrak{A}_{R_M} / \mathfrak{A}_R$ ist endlich-erzeugbar (bzw. endlich).

Beweis: Die Behauptung folgt aus Satz 3.3.5 und Satz 3.3.2.

Satz 3.3.6) Dieselben Voraussetzungen wie in Satz 3.3.4. Man setze $n = [L : K]$.

Behauptung: Für jedes $\alpha \in \mathfrak{F}(\mathcal{A}_{R,L}, \Gamma(L,K))$ ist $n\alpha = 0$.

Beweis: Die Behauptung folgt aus Satz 3.2.9 und Satz 1.2.2.

Satz 3.3.7) Dieselben Voraussetzungen wie in Satz 3.2.9.

Behauptung: Jedes $\alpha \in \mathfrak{F}(\mathcal{A}_{R,L}, \Gamma(L,K))$ ist von endlicher Ordnung.

Beweis: Sei $\alpha \in \mathfrak{F}(\mathcal{A}_{R,L}, \Gamma(L,K))$ und $a \in \alpha$ beliebig. Nach dem Hilfssatz aus Abschnitt 3.1 existiert ein Zwischenkörper $K \subset L_a \subset L$ mit folgenden Eigenschaften:

1) L_a ist eine endliche galoissche Körpererweiterung von K ;

2) $a \in \mathfrak{A}_{R L_a}$

Andererseits ist

$$\mathfrak{F}(\mathcal{A}_{R,L_a}, \Gamma(L_a, K)) = \mathcal{A}_{R,L_a} \cap \mathfrak{F}(\mathcal{A}_{R,L}, \Gamma(L,K)). \tag{50}$$

Also ist $\alpha \in \mathfrak{F}(\mathcal{A}_{R,L_a}, \Gamma(L_a,K))$. Daraus folgt nach Satz 3.3.6 $n\alpha = 0$, wobei $n = [L_a : K]$ ist. Damit ist die Behauptung vollständig bewiesen.

Satz 3.3.8) Sei R ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper K, der den folgenden Bedingungen genügt:

1) R besitzt mindestens einen Primdivisor $\mathfrak{g}$ mit den Eigenschaften I), II) aus Satz 3.2.9 ;

2) Die Klassengruppe $\mathfrak{A}_R$ ist endlich-erzeugbar.

Weiter sei L eine endliche zyklische Körpererweiterung von K, so dass der Körpergrad $n = [L : K]$ eine Primzahlpotenz ist.

Behauptung: Für jede natürliche Zahl s ist die abelsche Gruppe

$$\mathfrak{B}_s = \{ \alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A}_{R_L} / \mathfrak{A}_R, n^s \alpha = 0 \} \tag{51}$$

endlich.

Beweis: Nach Satz 3.2.9 ist $\mathfrak{A}_R = \mathfrak{F}(\mathfrak{A}_{R_L}, \Gamma(L,K))$. Daraus folgt nach Satz 1.4.6 die Behauptung, da $\mathfrak{A}_R$ endlich-erzeugbar ist.

Literatur.

[1] Artin, E. Galois theory.
Lectures delivered at the University of Notre Dame,
Second Edition, 1953.

[2] Bourbaki, N. Algèbre, chap. IV, V.
Hermann, Paris 1950.

[3] Chevalley, C. Introduction to the theory of algebraic functions of one variable.
American Mathematical Society, New York, 1951.

[4] Deuring, M. Lectures on the theory of algebraic functions of one variable.
Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1959.

[5] Hasse, H. Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper I.
Crelles Journal, Band 175, 22 - 62, 1936.

[6] Néron, A. Problèmes arithmétiques et géométriques rattachés à la notion de rang d'une courbe algébrique dans un corps.
Bulletin de la Société mathématique de France, Tome 80, 1952, 101 - 166.

[7] Northcott, D. G. An Introduction to homological Algebra.
Cambridge at the University Press, 1960.

[8] Serre, J. P. Corps locaux.
Hermann, Paris, 1962.

[9] Weil, A. Foundations of algebraic geometry.
American Mathematical Society, New York, 1946.

[10] Weil, A. Variétés abéliennes et courbes algébriques.
Hermann, Paris, 1948.

[11] Weiss, E. Algebraic number theory.
McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.

L e b e n s l a u f

Ich, Norman Guthschmidt, bin geboren am 31.Dezember 1926 in Sofia/Bulgarien als Sohn des Dr.jur. Reinhard Guthschmidt und seiner Ehefrau Iwana geb. Berowa. In Sofia wuchs ich auf, besuchte dort die Grundschule, das Progymnasium und das 1.Knabengymnasium Sv.Iwan Rilski, an welchem ich 1946 die Reifeprüfung ablegte. Anschliessend studierte ich an der Universität Sofia zwei Semester Mathematik, unterbrach aber mein Studium, da ich mit Erreichung der Volljährigkeit die Möglichkeit erhielt, meine Aussiedlung aus Bulgarien zu betreiben, was infolge der politischen Verhältnisse schwierig und sehr zeitraubend war.

Im Sommer 1949 traf ich in Deutschland ein und begann mit dem Wintersemester 1949/50 mein eigentliches Studium der Mathematik an der Universität Göttingen, wo ich 1953 mein Vordiplom erhielt. Meine Hauptdiplomprüfung bestand ich 1956 mit einer Arbeit aus der Galoistheorie der nicht notwendig kommutativen Körper.

Während der folgenden Jahre arbeitete ich zunächst als wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität Göttingen und befasste mich während dieser Zeit vornehmlich mit algebraischer Zahlentheorie, Theorie der algebraischen Funktionen, Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher und Garbentheorie. Durch Anregung von Professor Deuring richtete ich mein besonderes Interesse auf die Theorie der algebraischen Funktionen, aus welchem Gebiet auch das Thema der vorliegenden Dissertation stammt.

Ende 1960 übersiedelte ich nach Westberlin, wo ich zunächst als wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Freien Universität arbeitete und seit 1963 als Verwalter einer Assistentenstelle bei Professor Grotemeyer tätig bin.